

Colle S01

30/09/26

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 – Propriété (caractérisation de la fonction réciproque)

Si $f : E \rightarrow F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective de E sur F ;
2. Il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée *fonction réciproque de f* , notée f^{-1} .

2 Exercices

2.1 Équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (\text{E1})$$

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E1).
 - a) Déterminer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
 - b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$. On note cette égalité (E2).
 - c) À l'aide de (E1) et (E2), déterminer une expression de $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner la conclusion de l'exercice.

2.2 Bijection réciproque

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . On considère l'application

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Colle S01

30/09/26

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

2 Exercices

2.1 Équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

2.2 Images directes et réciproques

Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F . On considère les applications :

$$\phi \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F) \\ A \longmapsto f(A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ B \longmapsto f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) f est injective ;
- b) ϕ est injective ;
- c) ψ est surjective.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) f est surjective ;
- b) ϕ est surjective ;
- c) ψ est injective.