

Correction de la colle S01

30/09/26

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 – Propriété (caractérisation de la fonction réciproque)

Si $f : E \rightarrow F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective de E sur F ;
2. Il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée *fonction réciproque de f* , notée f^{-1} .

$\Rightarrow$ Supposons f bijective. Pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$: on le note $f^{-1}(y)$, ce qui définit une application $g = f^{-1} : F \rightarrow E$. Par construction, pour tout $y \in F$, $f(f^{-1}(y)) = y$, c'est-à-dire $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$. Pour tout $x \in E$, x est un antécédent de $f(x)$, et c'est le seul par injectivité de f : donc $f^{-1}(f(x)) = x$, c'est-à-dire $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

Injectivité. Soit x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. En appliquant g : $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, donc $x = x'$ puisque $g \circ f = \text{Id}_E$.

Surjectivité. Soit $y \in F$. Posons $x = g(y) \in E$: alors $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$. Donc y possède un antécédent.

Ainsi f est bijective.

Unicité. Si g vérifie les deux égalités, alors, f étant bijective,

$$g = \text{Id}_E \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \text{Id}_F = f^{-1},$$

par associativité de la composition. L'application g est donc unique : c'est f^{-1} .

2 Exercices

2.1 Équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (\text{E1})$$

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E1).

- a) Déterminer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$. On note cette égalité (E2).
- c) À l'aide de (E1) et (E2), déterminer une expression de $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Donner la conclusion de l'exercice.

L'exercice est structuré comme un raisonnement par **analyse-synthèse** : la question 1 est l'analyse (on suppose qu'une solution existe et on en déduit sa forme), la question 2 contient la synthèse.

1. Soit f une fonction vérifiant (E1).

- a) En appliquant (E1) avec $x = \frac{1}{2}$ (on a alors $1-x = \frac{1}{2}$) :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} \iff \frac{3}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \iff f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.}$$

- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $1-x$ est aussi un réel ; on peut donc appliquer (E1) à $1-x$ à la place de x (par **déduction**) :

$$f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = 1 + (1-x),$$

$$\text{c'est-à-dire } \boxed{f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x} \quad (\text{E2}).$$

- c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les égalités (E1) et (E2) forment un système linéaire d'inconnues $f(x)$ et $f(1-x)$. On élimine $f(1-x)$: en multipliant (E2) par x , on obtient $x(1-x)f(x) + xf(1-x) = x(2-x)$, puis en soustrayant cette égalité à (E1) membre à membre :

$$f(x) - x(1-x)f(x) = 1+x-x(2-x) \iff (x^2-x+1)f(x) = x^2-x+1.$$

Le trinôme x^2-x+1 a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3 < 0$: il ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. On peut donc diviser par x^2-x+1 , et on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1.}$$

2. **Analyse** (question 1) : si f est solution, alors f est nécessairement la fonction constante égale à 1.

Synthèse : réciproquement, soit f la fonction constante égale à 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + xf(1-x) = 1 + x \times 1 = 1+x$: f vérifie (E1).

L'unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (E1) est la fonction constante égale à 1.

2.2 Bijection réciproque

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . On considère l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

1. $\Rightarrow$ Supposons f injective. Alors :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad f(X_1) = f(X_2) \implies X_1 = X_2.$$

D'une part, $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$.

D'autre part, $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$.

Ainsi, $f(A \cup B) = f(E)$, donc $A \cup B = E$.

- $\Leftarrow$ Supposons $A \cup B = E$. Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $f(X_1) = f(X_2)$.
On a donc $X_1 \cap A = X_2 \cap A$ et $X_1 \cap B = X_2 \cap B$, d'où :

$$(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B).$$

Or, comme $A \cup B = E$, $(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = X_1$ et $(X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2$.

Ainsi, $X_1 = X_2$. On a donc f injective.

En conclusion, $f \text{ injective} \iff A \cup B = E$.

2. $\Rightarrow$ Supposons f surjective. Alors :

$$\forall (Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \exists X \in \mathcal{P}(E), \quad (Y_1, Y_2) = f(X).$$

En particulier, on peut trouver $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $(\emptyset, A \cap B) = f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Ainsi, $X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = A \cap B$. On a donc :

$$\emptyset = \emptyset \cap B = (X \cap A) \cap B = (X \cap B) \cap A = (A \cap B) \cap A = A \cap B$$

D'où $A \cap B = \emptyset$.

- $\Leftarrow$ Supposons $A \cap B = \emptyset$. Soit $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a donc $Y_1 \cap B = Y_2 \cap A = \emptyset$. Posons $X = Y_1 \cup Y_2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(X) &= ((Y_1 \cup Y_2) \cap A, (Y_1 \cup Y_2) \cap B) \\ &= ((Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A), (Y_1 \cap B) \cup (Y_2 \cap B)) \\ &= (Y_1, Y_2). \end{aligned}$$

Ainsi, f est surjective.

En conclusion, $f \text{ surjective} \iff A \cap B = \emptyset$.

3. Supposons $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

$$\text{Soit } g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (X_1, X_2) & \longmapsto & X_1 \cup X_2 \end{array} \right.$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f(X) &= g(X \cap A, X \cap B) \\ &= (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ &= X \quad \text{car } A \cup B = E. \end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Par ailleurs, pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on a :

$$\begin{aligned} f \circ g(X_1, X_2) &= f(X_1 \cup X_2) \\ &= ((X_1 \cup X_2) \cap A, (X_1 \cup X_2) \cap B) \\ &= ((X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap A), (X_1 \cap B) \cup (X_2 \cap B)) \\ &= (X_1, X_2) \quad \text{car } X_1 \subset A, X_2 \subset B \text{ et } A \cap B = \emptyset. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$.

Les applications f et g sont donc bijectives et réciproques l'une de l'autre, on a :

$$\boxed{f^{-1} \left| \begin{array}{ll} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ (X_1, X_2) & \longmapsto X_1 \cup X_2 \end{array} \right.}$$

Correction de la colle S01

30/09/26

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

1. Supposons $g \circ f$ injective. Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. En appliquant g à cette égalité, on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. L'injectivité de $g \circ f$ donne alors $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f .

2. Supposons $g \circ f$ surjective. Soit z un élément de G . Grâce à la surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$. En posant $y = f(x) \in F$, on obtient $z = g(y)$, ce qui prouve la surjectivité de g .

Remarque. Les réciproques sont fausses : avec $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $g(2n) = n$ et $g(2n+1) = 0$, on a $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$, injective et surjective, alors que f n'est pas surjective et g n'est pas injective (TD3, exercice 10).

2 Exercices

2.1 Équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

On raisonne par **analyse-synthèse**.

▷ **Analyse.** Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction vérifiant la relation, et notons $a = f(1) \in \mathbb{N}$.

- Avec $m = n = 0$: $f(0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.
- Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.

Initialisation : $f(0) = 0 = a \times 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = an$. En appliquant la relation aux entiers n et 1 : $f(n+1) = f(n) + f(1) = an + a = a(n+1)$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.

Ainsi, si f convient, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $f : n \mapsto an$.

▷ **Synthèse.** Réciproquement, soit $a \in \mathbb{N}$ et $f : n \mapsto an$. Alors f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ (produit de deux entiers naturels), et pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$f(m + n) = a(m + n) = am + an = f(m) + f(n).$$

Donc f convient.

Les fonctions cherchées sont exactement les fonctions $f : n \mapsto an$, avec $a \in \mathbb{N}$.

2.2 Images directes et réciproques

Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F . On considère les applications :

$$\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) f est injective ;
- b) ϕ est injective ;
- c) ψ est surjective.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) f est surjective ;
- b) ϕ est surjective ;
- c) ψ est injective.

On utilise librement les résultats de l'exercice 15 : pour toute partie A de E et toute partie B de F , $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, avec égalité pour tout A si, et seulement si, f est injective, et égalité pour tout B si, et seulement si, f est surjective. On remarque aussi que $\psi \circ \phi(A) = f^{-1}(f(A))$ et $\phi \circ \psi(B) = f(f^{-1}(B))$.

1. On montre $(a) \iff (b)$ puis $(a) \iff (c)$.

- $\boxed{(a) \implies (b)}$ Supposons f injective. Soit $(A, A') \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $\phi(A) = \phi(A')$, c'est-à-dire $f(A) = f(A')$. Alors, d'après l'exercice 15 (question 2),

$$A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(A')) = A'.$$

Donc ϕ est injective.

- $\boxed{(b) \implies (a)}$ Supposons ϕ injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $\phi(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = \phi(\{x_2\})$, donc $\{x_1\} = \{x_2\}$ par injectivité de ϕ , d'où $x_1 = x_2$. Donc f est injective.
- $\boxed{(a) \implies (c)}$ Supposons f injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Posons $B = f(A) \in \mathcal{P}(F)$; alors, d'après l'exercice 15 (question 2), $\psi(B) = f^{-1}(f(A)) = A$. Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ a donc un antécédent par ψ : ψ est surjective.
- $\boxed{(c) \implies (a)}$ Supposons ψ surjective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. La partie $\{x_1\}$ de E admet un antécédent par ψ : il existe $B \subseteq F$

tel que $f^{-1}(B) = \{x_1\}$. Comme $x_1 \in f^{-1}(B)$, on a $f(x_1) \in B$, donc $f(x_2) \in B$, donc $x_2 \in f^{-1}(B) = \{x_1\}$, d'où $x_2 = x_1$. Donc f est injective.

f injective $\iff \phi$ injective $\iff \psi$ surjective.

2. On montre de même $(a) \iff (b)$ puis $(a) \iff (c)$.

- $(a) \implies (b)$ Supposons f surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Posons $A = f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(E)$; alors, d'après l'exercice 15 (question 4), $\phi(A) = f(f^{-1}(B)) = B$. Donc ϕ est surjective.
- $(b) \implies (a)$ Supposons ϕ surjective. La partie F de F admet un antécédent : il existe $A \subseteq E$ tel que $f(A) = F$. Comme $A \subseteq E$, on a $F = f(A) \subseteq f(E) \subseteq F$, donc $f(E) = F$: f est surjective.
- $(a) \implies (c)$ Supposons f surjective. Soit $(B, B') \in \mathcal{P}(F)^2$ tel que $\psi(B) = \psi(B')$, c'est-à-dire $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$. Alors, d'après l'exercice 15 (question 4),

$$B = f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B')) = B'.$$

Donc ψ est injective.

- $(c) \implies (a)$ Supposons ψ injective. On a $f^{-1}(F) = E$ et, d'après l'exercice 15 (question 1) appliqué à $A = E$, $E \subseteq f^{-1}(f(E)) \subseteq E$, donc $f^{-1}(f(E)) = E$. Ainsi $\psi(f(E)) = E = \psi(F)$, et l'injectivité de ψ donne $f(E) = F$: f est surjective.

f surjective $\iff \phi$ surjective $\iff \psi$ injective.