Jean Butlen

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S16

04/02/26

1 Démonstration

Démontrer le **Théorème de Bolzano**, puis le **Théorème des valeurs intermédiaires**.

2 Exercices

2.1 Un exemple du cours

Nous considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n (1 - u_n) \end{cases}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

2.2 Continuité et relation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en 0 telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Grégoire Le Barber

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S16

04/02/26

1 Démonstration

Démontrer le lemme puis la proposition suivants :

Lemme 1 – Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A.
Nous disposons de l'équivalence suivante :

$$M = \sup A \iff \exists \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = M.$$

Proposition 2 – Image d'un intervalle fermé

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$, alors $f\Big([a,b]\Big)$ est un intervalle fermé.
Plus précisément, si f est continue sur $[a,b]$, alors $f\Big([a,b]\Big) = [m,M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a,b]$.

2 Exercices

2.1 Un exemple du cours

Étudier l'équation $x^3 - e^{-x} = 1$ sur $\mathbb{R}$.

On attend seulement la preuve de l'existence (si elle existe) et de l'unicité (si elle est unique) d'une solution.

2.2 Une équation de degré n

À chaque $n \in \mathbb{N}^*$, nous associons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n + 2x - 5.$$

1. Justifier que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe représentative $\mathcal{C}_n$ de cette fonction passe par un point fixe.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution notée a_n.
3. Préciser a_1.
4. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n \in [1,2]$.
5. Prouver que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$f_{n+1}\left(a_n\right) \geqslant 0.$$

   En déduire le sens de variation de la suite (a_n).
6. Montrer que cette suite converge et préciser sa limite en $+\infty$.