Lycée Saint Augustin — 2025–2026
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes — M. Berard

MATHÉMATIQUES
COMPOSITION TRIMESTRIELLE N° 2

Lundi 23 Février 2026

Durée : 4 heures

Barème : 20 points

D'après les sujets du Bac 2022, 2023 & 2024

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, d'une part vous le signalez au surveillant, d'autre part vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Calculatrice autorisée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être encadrés.
- Composer sur **copies doubles grand carreaux uniquement**.
- À la fin d'un exercice, on **change de page** (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part **importante** dans l'appréciation des copies.
- **En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.**

Exercice 1 Essai clinique *(7 points)*

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.

On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par

$$f(t) = 3te^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a)** On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;10]$, on a :

$$f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}.$$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

c) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?

Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. **a)** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.

Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

3. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
4. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.
5. **a)** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
6. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 2 Étude d'une population d'insectes *(6 points)*

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0{,}4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0{,}1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2 \end{cases}$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2.$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$.

3. **a)** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

b) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c) Déterminer la valeur de ℓ.

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

a) Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.4)` ?

b) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.35)`.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

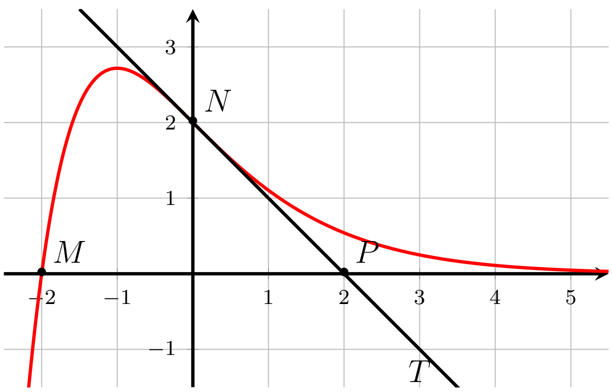
Exercice 3 Étude de fonction *(7 points)*

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point $N(0\,;2)$;
- le point $M(-2\,;0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et $P(2\,;0)$ appartenant à la tangente T.

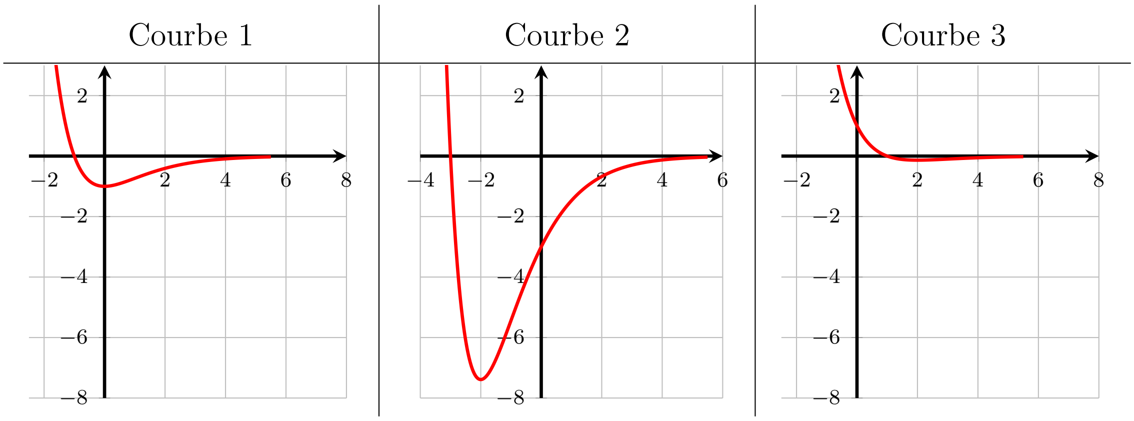
On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,,-1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. a) Donner $f(0)$.
   b) Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.



Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la **partie A**.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. a) Étudier la convexité de f.
   b) Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Bon courage.