Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. Berard

MATHÉMATIQUES
DEVOIR MAISON N° 5

À rendre le Jeudi 5 Février 2026
Durée indicative : 8 heures
Barème : 42 points

Récurrence. Limites de fonctions. Continuité.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$.
- Composer sur **copies doubles grand carreaux uniquement**.
- À la fin d'un exercice, on **change de page** (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part **importante** dans l'appréciation des copies.
- **En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.**

Exercice 1 Convergence rapide vers le nombre e *(10 points)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur [0,1] par

$$f(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = -e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

On pose, pour tout $x \in [0{,}1]$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

de sorte que $f(x) = -e^{-x} p_n(x)$.

1. Montrer que :

$$\forall\, x \in [0{,}1], \quad p_n'(x) = p_{n-1}(x).$$

2. Justifier ainsi que :

$$\forall\, x \in [0{,}1], \quad f'(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n!}$$

3. En déduire que $f(0) \leqslant f(1)$.

Pour tout réel $x \in [0{,}1]$, posons $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{n!}$.

4. Quel est le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle [0,1] ?

5. En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f(0) \leqslant f(1) \leqslant f(0) + \frac{1}{n!}$$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

6. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leqslant u_n \leqslant e.$$

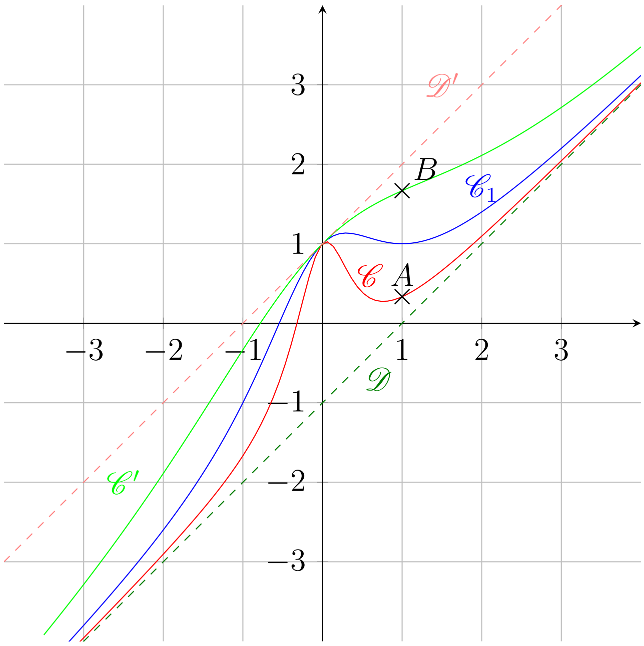
7. En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

Exercice 2 D'après Baccalauréat (Polynésie – 2004) *(12 points)*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soit la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = x + \frac{1 - \lambda x^2}{1 + \lambda x^2}.$$

Dans le repère orthonormal de centre O ci-dessous, on a représenté la droite $\mathscr{D} : y = x - 1$ et la droite $\mathscr{D}' : y = x + 1$, la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de f_1 et deux autres courbes représentatives de f_λ : $\mathscr{C}$ passant par $A\left(1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ et $\mathscr{C}'$ passant par $B\left(1\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.



1. Déterminer les limites de f_λ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Justifier que, pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, la droite $\mathscr{D}'$ est tangente à la courbe représentative de f_λ.
3. Déterminer le réel λ associé à $\mathscr{C}$ et celui associé à $\mathscr{C}'$.
4. a) Justifier que, pour tout x réel, on a :

$$f_\lambda(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + \lambda x^2} \quad \text{et} \quad f_\lambda(x) = x + 1 - \frac{2\lambda x^2}{1 + \lambda x^2}.$$

   b) En déduire pour tout λ strictement positif :
   — la position de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ par rapport aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$;
   — les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$.
5. On fait tendre λ vers $+\infty$.
   Vers quelle fonction f_λ va-t-elle se rapprocher ?

Exercice 3 Algorithme de Héron d'Alexandrie[1] : Valeurs approchées de $\sqrt{a}$ *(20 points)*

Soient un réel $a > 0$ et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution appartenant à $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Nous considérons à présent la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 > \sqrt{a}$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

3. En choisissant une valeur pour a et pour $u_0 > \sqrt{a}$, représenter sur la droite des abscisses d'un repère orthonormal du plan les premiers termes de cette suite.

Quelles conjectures sur la comportement de cette suite sont-elles induites par la figure ?

4. Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$ et déterminer son sens de variation. En déduire que cette suite converge vers un réel que l'on précisera.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.$$

En déduire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

6. Proposer un algorithme donnant un nombre d'itérations pour lequel on est sûr d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-P} près.

Bon courage.

1. Mathématicien grec : 1$^{\text{er}}$ siècle av. J.-C.