Lycée Saint Augustin — 2024–2025

Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes — M. Berard

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 5

À rendre le Jeudi 5 Février 2026

Durée indicative : 8 heures

Barème : 42 points

Récurrence. Limites de fonctions. Continuité.

Exercice 1 Convergence rapide vers le nombre e *(10 points)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[0{,}1]$ par

$$f(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = -e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

On pose, pour tout $x \in [0{,}1]$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

de sorte que $f(x) = -e^{-x} p_n(x)$.

1. *(1 pt)* **Montrer que :**

$$\forall\, x \in [0{,}1], \quad p_n'(x) = p_{n-1}(x).$$

La fonction p_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Nous avons

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [0{,}1], \quad p_n'(x) &= 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= p_{n-1}(x). \end{aligned}$$

2. *(2 pts)* **Justifier ainsi que :**

$$\forall\, x \in [0{,}1], \quad f'(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n!}$$

La fonction $f : x \longmapsto -e^{-x} p_n(x)$ est dérivable sur $[0{,}1]$, comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \in [0{,}1]$, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(-e^{-x}) p_n(x) - e^{-x} p_n'(x) \\ &= e^{-x} \Big(p_n(x) - p_n'(x)\Big). \end{aligned}$$

Puisque $p_n'(x) = p_{n-1}(x)$, nous en déduisons

$$f'(x) = e^{-x} \Big(p_n(x) - p_{n-1}(x)\Big).$$

Cela permet de conclure par

$$\forall\, x \in [0{,}1], \quad f'(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n!}.$$

3. *(1 pt)* **En déduire que** $f(0) \leqslant f(1)$**.**

Pour tout $x \in [0{,}1]$,

$$f'(x) = e^{-x}\frac{x^n}{n!} \geqslant 0,$$

donc la fonction f est croissante sur $[0{,}1]$.
Nous en déduisons

$$\boxed{f(0) \geqslant f(1).}$$

Pour tout réel $x \in [0{,}1]$, posons $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{n!}$.

4. *(2 pts)* **Quel est le sens de variations de la fonction** g **sur l'intervalle** $[0{,}1]$ **?**

La fonction g est dérivable par différence sur $[0{,}1]$.
Pour tout réel $x \in [0{,}1]$, nous obtenons

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(x^n e^{-x} - 1).$$

Pour $x \in [0{,}1]$, d'une part, nous avons

$$0 \leqslant x^n \leqslant 1,$$

d'autre part, la fonction exp étant croissante sur $\mathbb{R}$, il vient

$$-1 \leqslant -x \leqslant 0 \implies 0 < e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant 1.$$

En multipliant membres à membres ces deux doubles inégalités dans $\mathbb{R}_+$, nous obtenons :

$$0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant 1,$$

ce qui implique

$$x^n e^{-x} - 1 \leqslant 0.$$

Nous en déduisons

$$\forall\, x \in [0{,}1], \quad g'(x) \leqslant 0,$$

$\boxed{\text{ce qui justifie que la fonction } g \text{ est décroissante sur l'intervalle } [0{,}1].}$

5. *(1 pt)* **En déduire l'encadrement suivant :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(0) \leqslant f(1) \leqslant f(0) + \frac{1}{n!}$$

De la décroissance de g, il résulte

$$g(0) \geqslant g(1),$$

c'est-à-dire

$$f(0) \geqslant f(1) - \frac{1}{n!}.$$

Puisque nous avons établi à la question précédente que $f(0) \leqslant f(1)$, nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(0) \leqslant f(1) \leqslant f(0) + \frac{1}{n!}.}$$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

6. *(2 pts)* **Montrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leqslant u_n \leqslant e.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous observons que

$$f(1) = -e^{-1}u_n \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

La double inégalité obtenue à la question précédente devient

$$-1 \leqslant -e^{-x}u_n \leqslant -1 + \frac{1}{n!},$$

soit

$$1 - \frac{1}{n!} \leqslant e^{-1}u_n \leqslant 1.$$

En multipliant par $e > 0$, nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leqslant u_n \leqslant e.}$$

7. *(1 pt)* **En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.**

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) = e$, en appliquant le théorème d'encadrement, nous obtenons

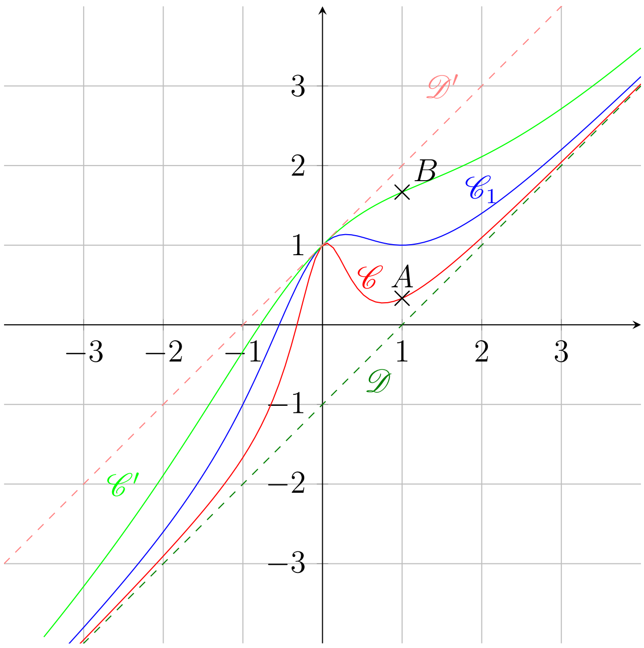
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e.}$$

Exercice 2 D'après Baccalauréat (Polynésie – 2004) *(12 points)*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soit la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = x + \frac{1-\lambda x^2}{1+\lambda x^2}.$$

Dans le repère orthonormal de centre O ci-dessous, on a représenté les droites $\mathscr{D} : y = x - 1$ et $\mathscr{D}' : y = x + 1$, la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de f_1 et deux autres courbes représentatives de f_λ : $\mathscr{C}$ passant par $A\left(1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ et $\mathscr{C}'$ passant par $B\left(1\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.



1. *(2 pts)* **Déterminer les limites de f_λ en $-\infty$ et $+\infty$.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons :

$$f_\lambda(x) = x + \frac{\frac{1}{x^2} - \lambda}{\frac{1}{x^2} + \lambda}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, nous en déduisons

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\lambda x^2}{1+\lambda x^2} = -1.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, nous pouvons conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = -\infty.}$$

2. *(2 pts)* **Justifier que, pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, la droite $\mathscr{D}'$ est tangente à la courbe représentative de f_λ.**

Soit $\lambda \geqslant 0$. Calculons la dérivée de f_λ :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda'(x) &= 1 + \frac{-2\lambda x(1+\lambda x^2) - 2\lambda x(1-\lambda x^2)}{(1+\lambda x^2)^2} \\ &= 1 - 2\lambda x \frac{2}{(1+\lambda x^2)^2},\end{aligned}$$

ce qui permet de calculer l'équation réduite de la tangente à f_λ en 0 :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\lambda,0} : y &= f_\lambda'(0)x + f_\lambda(0) \\ &= x + 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la droite $\mathscr{D}' : y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de f_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3. *(2 pts)* **Déterminer le réel λ associé à $\mathscr{C}$ et celui associé à $\mathscr{C}'$.**

On appelle λ_1 et λ_2 les réels positifs tels que f_{λ_1} soit la fonction dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$ et f_{λ_2} soit la fonction dont la courbe représentative est $\mathscr{C}'$.

— La courbe $\mathscr{C}$ passant par le point $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$, nous avons :

$$\begin{aligned}f_{\lambda_1}(1) = \frac{1}{3} &\iff 1 + \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} = \frac{1}{3} \\ &\iff \frac{2}{1+\lambda_1} = \frac{1}{3} \\ &\iff 1 + \lambda_1 = 6 \\ &\iff \boxed{\lambda_1 = 5}\end{aligned}$$

— La courbe $\mathscr{C}'$ passant par le point $\left(1; \dfrac{5}{3}\right)$, nous avons :

$$\begin{aligned}f_{\lambda_2}(1) = \frac{5}{3} &\iff 1 + \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{5}{3} \\ &\iff \frac{2}{1+\lambda_2} = \frac{5}{3} \\ &\iff 1 + \lambda_2 = \frac{6}{5} \\ &\iff \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{5}}\end{aligned}$$

4. a) *(2 pt)* **Justifier que, pour tout x réel, on a :**

$$f_\lambda(x) = x - 1 + \frac{2}{1+\lambda x^2} \quad \text{et} \quad f_\lambda(x) = x + 1 - \frac{2\lambda x^2}{1+\lambda x^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Nous avons d'une part

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= x + \frac{1-\lambda x^2}{1+\lambda x^2} \\ &= x + \frac{2-1-\lambda x^2}{1+\lambda x^2} \\ &= x + \frac{2-(1+\lambda x^2)}{1+\lambda x^2} \\ &= x - 1 + \frac{2}{1+\lambda x^2}, \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= x + \frac{1-\lambda x^2}{1+\lambda x^2} \\ &= x + \frac{1+\lambda x^2 - 2\lambda x^2}{1+\lambda x^2} \\ &= x + 1 - \frac{2\lambda x^2}{1+\lambda x^2}, \end{aligned}$$

ce qui donne les expressions demandées.

b) **En déduire pour tout λ strictement positif :**

— *(1 pt)* **la position de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ par rapport aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$;**

Soit $\lambda > 0$.

— La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = x - 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous déduisons des expressions précédentes :

$$f_\lambda(x) - (x-1) = \frac{2}{1+\lambda x^2} > 0.$$

$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_\lambda \text{ est au-dessus de la droite } \mathscr{D}.}$

— La droite $\mathscr{D}'$ a pour équation $y = x + 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous déduisons des expressions précédentes :

$$f_\lambda(x) - (x+1) = -\frac{2\lambda x^2}{1+\lambda x^2} < 0.$$

$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_\lambda \text{ est en-dessous de la droite } \mathscr{D}'.}$

— *(1 pt)* **les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$.**

Pour tout réel x, nous avons :

$$f_\lambda(x) - (x-1) = \frac{2}{1+\lambda x^2}.$$

Comme $\lambda > 0$, nous savons que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 + \lambda x^2 = +\infty$, ce qui donne, par quotient :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_\lambda(x) - (x-1) = 0.$$

La droite $\mathscr{D} : y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ en $+\infty$ et en $-\infty$, pour tout $\lambda > 0$.

5. *(2 pts)* **On fait tendre λ vers $+\infty$.**
Vers quelle fonction f_λ va-t-elle se rapprocher ?

Nous avons, pour tout $\lambda \geqslant 0$:

$$f_\lambda(0) = 1.$$

Par ailleurs, pour tout réel $x \neq 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} 1 + \lambda x^2 = +\infty$, donc par quotient et somme :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} x - 1 + \frac{2}{1+\lambda x^2} = x - 1.$$

Ainsi, quand $\lambda \to +\infty$, f_λ va se rapprocher de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}}$$

Exercice 3 Algorithme de Héron d'Alexandrie[1] : Valeurs approchées de $\sqrt{a}$ *(20 points)*

Soient un réel $a > 0$ et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

1. *(2 pts)* **Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution appartenant à $\mathbb{R}_+^*$.**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x \\ &\iff \frac{x^2 + a}{2x} = x \\ &\iff x^2 = a. \end{aligned}$$

Puisque $x > 0$ et $a > 0$, nous en concluons que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0, +\infty[$ le réel $\sqrt{a}$ pour unique solution.

2. *(2 pts)* **Déterminer le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.**

Nous remarquons que $\sqrt{a}$ est un point fixe pour la fonction f, ce qui signifie que nous disposons de l'égalité

$$f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}.$$

La fonction f est dérivable par somme sur $]0, +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, nous avons

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{x^2 - a}{2x}.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{pour } 0 < x < \sqrt{a} \\ f'(x) = 0 & \text{pour } x = \sqrt{a} \\ f'(x) > 0 & \text{pour } x > \sqrt{a} \end{cases}$$

Le tableau de variations de la fonction f en résulte.

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	

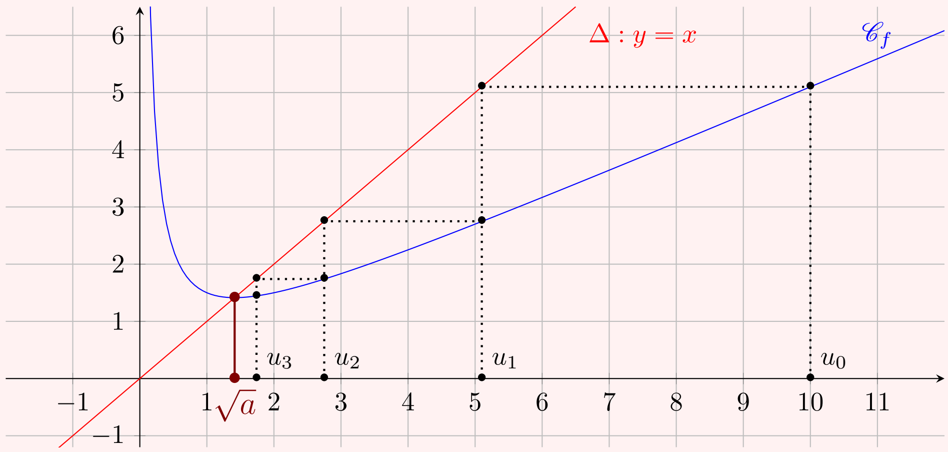
1. Mathématicien grec : 1er siècle av. J.-C.

Nous considérons à présent la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 > \sqrt{a}$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

3. *(2 pts)* **En choisissant une valeur pour a et pour $u_0 > \sqrt{a}$, représenter sur la droite des abscisses d'un repère orthonormal du plan les premiers termes de cette suite.**
Quelles conjectures sur la comportement de cette suite sont-elles induites par la figure ?

En choisissant par exemple $a = 2$ et $u_0 = 10$, nous obtenons



Nous déduisons de cette figure les conjectures suivantes :

- la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$
- elle est décroissante
- elle converge vers $\sqrt{a}$.

4. *(6 pts)* **Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$ et déterminer son sens de variation.**
En déduire que cette suite converge vers un réel que l'on précisera.

▷ Nous montrons d'abord par récurrence que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$.

Initialisation
Nous savons que $u_0 > \sqrt{a}$, donc $u_0 \geqslant \sqrt{a}$.
La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité
Nous supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, $u_n \geqslant \sqrt{a}$. En remarquant que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, il vient

$$f\left(u_n\right) \geqslant f(\sqrt{a}), \quad \text{soit } u_{n+1} \geqslant \sqrt{a},$$

ce qui prouve que la propriété proposée est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{a}.}$$

- Nous montrons ensuite par récurrence que la suite (u_n) est décroissante, c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Initialisation

Il s'agit de justifier que $u_1 \leqslant u_0$. Nous avons

$$u_1 - u_0 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) - u_0 = \frac{a - u_0^2}{2u_0}.$$

Nous savons que $u_0 > \sqrt{a}$, donc

$$u_1 - u_0 < 0,$$

ce qui implique

$$u_1 \leqslant u_0.$$

L'inégalité proposée est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité

Nous supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Nous savons que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ et que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{a}$, ce qui induit

$$f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n),$$

soit

$$u_{n+2} \leqslant u_{n+1},$$

ce qui prouve que la propriété proposée est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.}$$

- La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par le réel $\sqrt{a}$, donc cette suite converge vers un réel $\ell \geqslant \sqrt{a}$, d'après le théorème de la limite monotone.

  Puisque f est continue en ℓ, nous en déduisons que ℓ est l'unique solution dans l'intervalle $[\sqrt{a},+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$, ce qui justifie que $\ell = \sqrt{a}$.

  $\boxed{\text{Nous en concluons que la suite } (u_n) \text{ converge vers } \sqrt{a}.}$

5. *(6 pts)* **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.$$

En déduire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a} \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Soit n un entier naturel.
D'une part, puisque la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$, nous avons

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \geqslant 0.$$

D'autre part, il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} \\ &= \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - \sqrt{a} \\ &= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n} \\ &= \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2u_n} \end{aligned}$$

Puisque $u_n \geqslant \sqrt{a} > 0$, nous en déduisons, par comparaison des inverses de deux réels strictement positifs

$$\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}},$$

ce qui implique, puisque $\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0$,

$$\frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2u_n} \leqslant \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2\sqrt{a}}.$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2\sqrt{a}}.}$$

Nous montrons ensuite par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a} \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Initialisation

Nous avons $2\sqrt{a} \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right)^{2^0} = u_0 - \sqrt{a}$.
L'inégalité est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité
Supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Montrons

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n+1}}.$$

En utilisant la double inégalité obtenue précédemment, nous savons

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et par élévation au carré de deux réels positifs, nous obtenons

$$0 \leqslant \left(u_n - \sqrt{a}\right)^2 \leqslant (2\sqrt{a})^2\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n+1}}$$

ce qui donne

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} \times (2\sqrt{a})^2\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n+1}}$$

soit, après simplification,

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n+1}}$$

La double inégalité attendue est ainsi héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.}$$

6. *(2 pts)* **Proposer un algorithme donnant un nombre d'itérations pour lequel on est sûr d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-P} près.**

L'entier $P \geqslant 1$ étant choisi, pour que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{a}$, il suffit que

$$2\sqrt{a}\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n} < 10^{-P}.$$

C'est cette condition suffisante qui articule l'algorithme de Héron, l'exposant 2^n expliquant la convergence rapide vers une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-P} près.

Ce dernier est initialisé en choisissant $u_0 = a > 1$.

$$n = 4$$
$$u = 1.4142135623746899$$

Nous donnons la fonction Python récursive nommée `heron(n,a)` qui restitue une valeur approchée de $\sqrt{a}$ après n itérations de la formule de récurrence :

```python
def heron(n,a) :
    if n==0 :
        return a
    else :
        return 0.5*(heron(n-1,a)+a/heron(n-1,a))
```

Par exemple, nous obtenons

```
>>> heron(10,3)
>>> 1.7320508075688772
```

comme valeur approchée de $\sqrt{3}$.