Lycée Saint Augustin | 2025–2026
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes | M. Berard

MATHÉMATIQUES
DEVOIR MAISON N° 6

À rendre le Jeudi 5 Mars 2026
Durée indicative : 8 heures
Barème : 32 points

Limites de fonctions. Continuité. Dérivation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$.
- Composer sur **copies doubles grand carreaux uniquement**.
- À la fin d'un exercice, on **change de page** (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part **importante** dans l'appréciation des copies.
- **En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.**

1 Limites de fonctions

Exercice 1 Forme indéterminée et fraction rationnelle (souvenirs, souvenirs...) *(4 points)*

On se propose de déterminer selon les valeurs du réel a, la limite en $x = 2$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - a}.$$

1. Donner la limite de f en 2 si $a \neq 8$.

2. On suppose maintenant que $a = 8$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, noté D_f.

b) Montrer que :

$$\forall\, x \in D_f, \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 4}.$$

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

2 Type bac

Exercice 2 Bac 2025 *(8 points)*

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0{,}05 v_n^2 + 1{,}1 v_n.$$

Pour tout entier naturel n,v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025+n$, exprimée en millier d'individus.

4. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x.$$

5. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.

6. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

7. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.

8. **a)** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.

b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3 Notion de développement limité *(20 points)*

On se propose dans ce problème d'introduire la notion fondamentale de développement limité, en se bornant à l'ordre 1 et à l'ordre 2 (on généralisera à l'ordre n en première année). L'idée est simple : donner une traduction algébrique de la notion de tangente à une courbe, et imaginer ce que pourrait être la situation si on remplaçait la droite tangente (premier degré) par une parabole tangente (second degré), voire plus.

3.1 Développement limité à l'ordre 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant un réel a. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

1. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$?

Soit ε la fonction définie par $\varepsilon(a) = 0$ et, si $x \in I, x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

2. Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ (i.e. la fonction ε est continue en a) et que :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

Cette écriture de $f(x)$ est appelée développement limité de f à l'ordre 1 en a.

3. Interpréter graphiquement, à l'aide de $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en A, l'égalité ci-dessus. Faire une figure.

3.2 Quelques exemples et applications

4. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$. Former le développement limité de f à l'ordre 1 en 1. Expliciter la fonction ε.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$.

a) Écrire le développement limité de g à l'ordre 1 en 0 (on ne cherchera pas à expliciter la fonction ε).

b) Retrouver alors, à l'aide de ce développement limité, la valeur de $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

6. (Règle de L'Hospital[1]) Soit f et g deux fonctions définies et dérivables en 0. On suppose que $f(0) = g(0) = 0$, et que $g'(0) \neq 0$.

Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

7. En relativité restreinte, l'énergie d'une particule de masse m et de vitesse v est $E(v) = \gamma mc^2$, (c désignant la vitesse de la lumière) où on a posé :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'énergie cinétique est alors donnée par $E_c(v) = E(v) - E(0)$. On va prouver ici que, pour des vitesses v faibles devant c, on retrouve l'expression de l'énergie cinétique obtenue en mécanique classique. Pour simplifier, on pose $x = \frac{v^2}{c^2}$.

a) On a $\gamma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. On s'intéresse à γ (et à E) pour des valeurs de x proches de 0. Former le développement limité à l'ordre 1 en 0 de γ.

b) En déduire que $E(v) \simeq E(0) + \dfrac{1}{2} mv^2$ et conclure.

3.3 Développement limité à l'ordre 2

On reprend les notations et les hypothèses de la partie 3.1, en supposant de plus que ε est elle-même deux fois dérivable sur I (autrement dit, que sa dérivée est dérivable). On rappelle que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x). \tag{1}$$

8. Justifier qu'il existe une fonction φ vérifiant $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$ et telle que, pour tout x de I :

$$\varepsilon(x) = \varepsilon'(a)(x-a) + (x-a)\varphi(x). \tag{2}$$

9. On cherche à exprimer $\varepsilon'(a)$ en fonction de f (et de ses dérivées première et seconde). Pour cela, dériver deux fois la relation (1). En déduire que l'on a :

$$\varepsilon'(a) = \frac{1}{2} f''(a).$$

10. Utiliser alors les égalités (1) et (2) pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 de f en a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2 \varphi(x).$$

11. Applications.

a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction exponentielle. Illustrer graphiquement la situation.

b) Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ et $\lim_{x \to 0} \dfrac{2\ln(1+x) - 2x + x^2}{x^2}$.

Bon courage.

---

1. Guillaume François Antoine, marquis de l'Hospital (1661–1704), mathématicien français. La règle ici démontrée, qui porte son nom, a en fait été démontrée par Jean Bernoulli (1667–1748), mathématicien suisse.