



Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. BERARD

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 6

À rendre le Jeudi 5 Mars 2026
Durée indicative : 8 heures
Barème : 32 points

LIMITES DE FONCTIONS. CONTINUITÉ.
DÉRIVATION.

1 Limites de fonctions

Exercice 1 Forme indéterminée et fraction rationnelle (3 points)

On se propose de déterminer selon les valeurs du réel a , la limite en $x = 2$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - a}.$$

1. Donner la limite de f en 2 si $a \neq 8$.

Dans ce cas, la fonction f est bien définie en 2 (car le dénominateur ne s'annule pas) et nous avons par quotient

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{8 - a} = 0.$$

2. On suppose maintenant que $a = 8$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f , noté D_f .

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, avec x_1 et x_2 les racines du polynôme $x^2 + 2x - 8$.

Nous remarquons que $x_1 = 2$ est une racine évidente du trinôme $x^2 + 2x - 8$, dont le produit des deux racines est égal à -8 .

Nous en déduisons que $x = -4$ est l'autre racine de ce trinôme.

Ainsi, l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$.

- b) Montrer que :

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 4}.$$

Nous remarquons d'une part que 2 est une racine évidente du polynôme $x^3 - 8$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe a , b et c trois réels tels que :

$$x^3 - 8 = (x - 2)(ax^2 + bx + c),$$

soit

$$x^3 - 8 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c,$$

ce qui donne, par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in D_f$:

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

D'autre part, nous avons montré à la question précédente que $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$. Ainsi, nous déduisons de ces deux points :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8} \\ &= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 4}. \end{aligned}$$

Nous concluons :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 4}.$$

c) **Déterminer** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Nous concluons, à l'aide de la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 4} = \frac{12}{6} = 2.$$

2 Type bac

Exercice 2 Bac 2025 (8 points)

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1^{er} janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n , u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en millier d'individus.

1. (0,5 pt) **Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.**

L'année 2026 correspond au rang $n = 1$. La suite (u_n) étant géométrique de raison 0,93, nous avons :

$$u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58.$$

Au 1^{er} janvier 2026, la population du milieu A comptera 5 580 individus.

2. (0,5 pt) Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,93$ et de premier terme $u_0 = 6$.
D'après le cours, son terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6 \times 0,93^n.$$

3. (1 pt) Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

La raison de la suite géométrique est $q = 0,93$. Puisque $-1 < 0,93 < 1$, nous savons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0.$$

Par produit avec la constante 6, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'à long terme, la population animale du milieu A est vouée à disparaître (extinction).

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n , v_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025+ n , exprimée en millier d'individus.

4. (0,5 pt) Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.

L'année 2026 correspond au rang $n = 1$. En appliquant la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} v_1 &= -0,05v_0^2 + 1,1v_0 \\ &= -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 \\ &= -0,05 \times 36 + 6,6 \\ &= -1,8 + 6,6 \\ &= 4,8. \end{aligned}$$

Au 1^{er} janvier 2026, la population du milieu B comptera 4 800 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

5. (1,5 pts) **Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 11]$.**

La fonction $f : x \mapsto -0,05x^2 + 1,1x$ est une fonction polynomiale dérivable sur $[0 ; 11]$.

Pour tout réel $x \in [0 ; 11]$:

$$f'(x) = -0,05(2x) + 1,1 = -0,1x + 1,1.$$

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 11]$:

$$-0,1x + 1,1 \geq 0 \iff -0,1x \geq -1,1$$

$$\iff x \leq \frac{-1,1}{-0,1}$$

$$\iff x \leq 11.$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0 ; 11], \quad f'(x) \geq 0.$$

Nous en concluons que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 11]$.

6. (2 pts) **Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.**

Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$. Nous avons bien $2 \leq 4,8 \leq 6 \leq 6$, c'est-à-dire $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$. Nous remarquons que tous ces termes appartiennent à l'intervalle $[0 ; 11]$ sur lequel f est croissante. La composition par f préserve donc l'ordre des inégalités :

$$f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6).$$

Calculons les images des bornes :

$$\text{— } f(2) = -0,05(2^2) + 1,1(2) = -0,2 + 2,2 = 2.$$

$$\text{— } f(v_{n+1}) = v_{n+2} \text{ et } f(v_n) = v_{n+1}.$$

$$\text{— } f(6) = v_1 = 4,8 \leq 6.$$

L'enchaînement d'inégalités devient :

$$2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6.$$

La propriété est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

7. (1 pt) En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ .

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$, ce qui signifie que la suite (v_n) est décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 2$, ce qui signifie qu'elle est minorée par 2.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (v_n) est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \geq 2$.

8. a) (0,5 pt) Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale), et la suite (v_n) convergeant vers ℓ , nous avons par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n\right) \implies \ell = f(\ell).$$

Réolvons l'équation $f(\ell) = \ell$:

$$\begin{aligned} -0,05\ell^2 + 1,1\ell = \ell &\iff -0,05\ell^2 + 0,1\ell = 0 \\ &\iff \ell(-0,05\ell + 0,1) = 0. \end{aligned}$$

Ceci donne $\ell = 0$ ou $-0,05\ell + 0,1 = 0 \iff \ell = \frac{0,1}{0,05} = 2$. Comme nous savons que $\ell \geq 2$ (car $v_n \geq 2$), nous en concluons que $\ell = 2$.

- b) (0,5 pt) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Dans le milieu B, à long terme, la population se stabilisera autour de 2 000 individus.

3 Notion de développement limité (20 points)

On se propose dans ce problème d'introduire la notion fondamentale de développement limité, en se bornant à l'ordre 1 et à l'ordre 2 (on généralisera à l'ordre n en première année). L'idée est simple : donner une traduction algébrique de la notion de tangente à une courbe, et imaginer ce que pourrait être la situation si on remplaçait la droite tangente (premier degré) par une parabole tangente (second degré), voire plus.

3.1 Développement limité à l'ordre 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant un réel a . On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative, et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a .

1. (1 pt) **Que vaut** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$?

Par hypothèse, la fonction f est dérivable en a . Par la définition classique du nombre dérivé, nous obtenons immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Soit ε la fonction définie par $\varepsilon(a) = 0$ et, si $x \in I$, $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

2. (1,5 pts) **Prouver que** $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ (i.e. la fonction ε est continue en a) et que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

Cette écriture de $f(x)$ est appelée **développement limité de f à l'ordre 1 en a** .

D'après la question précédente, nous avons $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. En utilisant la définition de $\varepsilon(x)$ pour $x \neq a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Puisque $\varepsilon(a) = 0$, la fonction ε est donc continue en a .

En partant de la définition de $\varepsilon(x)$ pour $x \neq a$, isolons $f(x)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) &\iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x) \\ &\iff f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \\ &\iff f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x). \end{aligned}$$

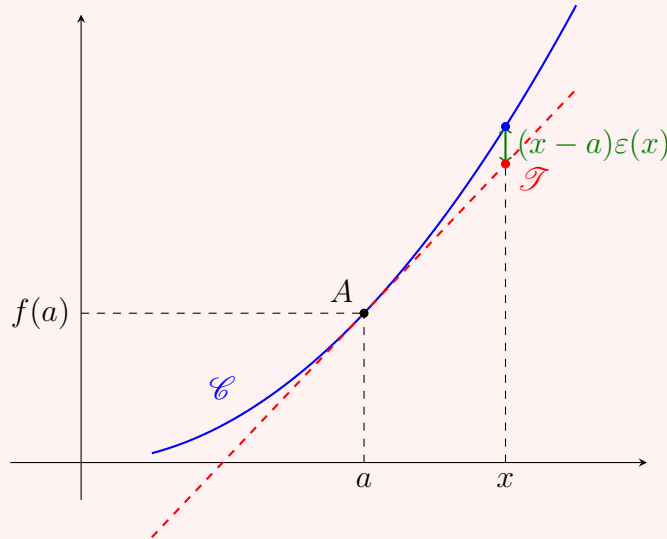
De plus, si $x = a$, cette égalité devient $f(a) = f(a) + f'(a) \times 0 + 0 \times \varepsilon(a) = f(a)$, ce qui est vrai.

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

3. (1,5 pts) Interpréter graphiquement, à l'aide de $\mathcal{C}$ et de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en A , l'égalité ci-dessus. Faire une figure.

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(a, f(a))$ est donnée par $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Ainsi, le terme $(x - a)\varepsilon(x)$ représente la distance algébrique (l'écart vertical) entre la courbe $\mathcal{C}$ et sa tangente $\mathcal{T}$ en un point d'abscisse x . L'écriture exprime le fait qu'autour de a , la courbe et la tangente sont confondues à l'erreur $(x - a)\varepsilon(x)$ près, erreur qui tend vers 0 « plus vite » que $(x - a)$.



3.2 Quelques exemples et applications

4. (2 pts) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Former le développement limité de f à l'ordre 1 en 1. Expliciter la fonction ε .

Pour la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, et $a = 1$, nous avons $f(1) = 1$.

La dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(1) = -1$.

Le développement limité à l'ordre 1 en 1 est :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + (x - 1)\varepsilon(x) \iff \frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + (x - 1)\varepsilon(x).$$

Pour $x \neq 1$, explicitons $\varepsilon(x)$ en isolant ce terme :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} - (-1) \\ &= \frac{\frac{1-x}{x}}{x - 1} + 1 \\ &= -\frac{1}{x} + 1 \\ &= \frac{x - 1}{x}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = 0.$$

$$\text{Ainsi, on a bien } f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) = \frac{x-1}{x}.$$

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$.

a) (1 pt) Écrire le développement limité de g à l'ordre 1 en 0 (on ne cherchera pas à expliciter la fonction ε).

Pour la fonction exponentielle, on a $g(0) = e^0 = 1$ et $g'(0) = e^0 = 1$.
En appliquant la formule générale avec $a = 0$, on obtient directement :

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

b) (1 pt) Retrouver alors, à l'aide de ce développement limité, la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

D'après le développement limité écrit ci-dessus, on déduit pour tout $x \neq 0$:

$$e^x - 1 = x + x\varepsilon(x) \iff \frac{e^x - 1}{x} = \frac{x(1 + \varepsilon(x))}{x} = 1 + \varepsilon(x).$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 0$, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, nous retrouvons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

6. (2 pts) (Règle de L'Hospital¹) Soit f et g deux fonctions définies et dérivables en 0. On suppose que $f(0) = g(0) = 0$, et que $g'(0) \neq 0$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Utilisons le développement limité à l'ordre 1 en 0 pour les fonctions f et g .
Sachant que $f(0) = g(0) = 0$, on a :

$$f(x) = xf'(0) + x\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = xg'(0) + x\varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

1. Guillaume François Antoine, marquis de l'Hospital (1661–1704), mathématicien français. La règle ici démontrée, qui porte son nom, a en fait été démontrée par Jean Bernoulli (1667–1748), mathématicien suisse.

Pour $x \neq 0$ suffisamment proche de 0 (pour que $g(x) \neq 0$), le quotient s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{xf'(0) + x\varepsilon_1(x)}{xg'(0) + x\varepsilon_2(x)} \\ &= \frac{x(f'(0) + \varepsilon_1(x))}{x(g'(0) + \varepsilon_2(x))} \\ &= \frac{f'(0) + \varepsilon_1(x)}{g'(0) + \varepsilon_2(x)}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$, le numérateur tend vers $f'(0)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$, le dénominateur tend vers $g'(0)$, qui est non nul par hypothèse. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}}.$$

7. En relativité restreinte, l'énergie d'une particule de masse m et de vitesse v est $E(v) = \gamma mc^2$, (c désignant la vitesse de la lumière) où on a posé :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'énergie cinétique est alors donnée par $E_c(v) = E(v) - E(0)$. On va prouver ici que, pour des vitesses v faibles devant c , on retrouve l'expression de l'énergie cinétique obtenue en mécanique classique. Pour simplifier, on pose $x = \frac{v^2}{c^2}$.

- a) (1 pt) On a $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. On s'intéresse à γ (et à E) pour des valeurs de x proches de 0. Former le développement limité à l'ordre 1 en 0 de γ .

Soit $x \in [0,1[$.

On a $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ainsi, $\gamma(0) = 1$.

Calculons la dérivée :

$$\gamma'(x) = -\frac{1}{2} \times (-1)(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, $\gamma'(0) = \frac{1}{2}$.

Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de γ s'écrit donc :

$$\boxed{\gamma(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

b) (1,5 pts) **En déduire que $E(v) \simeq E(0) + \frac{1}{2}mv^2$ et conclure.**

On pose $x = \frac{v^2}{c^2}$. Pour des vitesses v faibles devant c ($v \ll c$), x est proche de 0.

On a $E(v) = \gamma(x)mc^2$. Remplaçons $\gamma(x)$ par son développement limité :

$$\begin{aligned} E(v) &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x) \right) \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + mc^2 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \varepsilon \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mv^2\varepsilon \left(\frac{v^2}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Le terme mc^2 correspond à l'énergie de masse au repos $E(0)$. Le terme « reste » $mv^2\varepsilon \left(\frac{v^2}{c^2} \right)$ est négligeable devant $\frac{1}{2}mv^2$ pour v très petit. On a donc bien l'approximation :

$$E(v) \simeq E(0) + \frac{1}{2}mv^2.$$

Conclusion : Pour des vitesses très faibles devant celle de la lumière, l'énergie cinétique relativiste $E_c(v) = E(v) - E(0)$ se réduit au premier ordre à la formule de l'énergie cinétique classique newtonienne $\frac{1}{2}mv^2$.

3.3 Développement limité à l'ordre 2

On reprend les notations et les hypothèses de la partie 3.1, en supposant de plus que ε est elle-même deux fois dérivable sur I (autrement dit, que sa dérivée est dérivable). On rappelle que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x). \quad (1)$$

8. (1,5 pts) **Justifier qu'il existe une fonction φ vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ et telle que, pour tout x de I :**

$$\varepsilon(x) = \varepsilon'(a)(x - a) + (x - a)\varphi(x). \quad (2)$$

Il s'agit d'appliquer à la fonction ε le résultat de la partie 3.1.

En effet, ε est par hypothèse deux fois dérivable sur I , donc dérivable en a .

Le développement limité de ε à l'ordre 1 en a s'écrit :

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(a) + \varepsilon'(a)(x - a) + (x - a)\varphi(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

Or, nous savons que, par définition, $\varepsilon(a) = 0$. Il en résulte immédiatement :

$$\varepsilon(x) = \varepsilon'(a)(x - a) + (x - a)\varphi(x).$$

9. (2,5 pts) On cherche à exprimer $\varepsilon'(a)$ en fonction de f (et de ses dérivées première et seconde). Pour cela, dériver deux fois la relation (1). En déduire que l'on a :

$$\varepsilon'(a) = \frac{1}{2}f''(a).$$

En dérivant une première fois la relation (1) par rapport à x (le terme $(x-a)\varepsilon(x)$ se dérive comme un produit de la forme uv) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + f'(a) + 1 \times \varepsilon(x) + (x-a)\varepsilon'(x) \\ &= f'(a) + \varepsilon(x) + (x-a)\varepsilon'(x). \end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 + \varepsilon'(x) + [1 \times \varepsilon'(x) + (x-a)\varepsilon''(x)] \\ &= 2\varepsilon'(x) + (x-a)\varepsilon''(x). \end{aligned}$$

Évaluons maintenant cette dérivée seconde en $x = a$:

$$\begin{aligned} f''(a) &= 2\varepsilon'(a) + (a-a)\varepsilon''(a) \\ f''(a) &= 2\varepsilon'(a). \end{aligned}$$

Nous en concluons bien :

$$\boxed{\varepsilon'(a) = \frac{1}{2}f''(a).}$$

10. (1 pt) Utiliser alors les égalités (1) et (2) pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 de f en a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varphi(x).$$

Reprenons l'égalité (1) et substituons l'expression de $\varepsilon(x)$ donnée par (2) :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a) [\varepsilon'(a)(x-a) + (x-a)\varphi(x)] \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon'(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varphi(x). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, $\varepsilon'(a) = \frac{1}{2}f''(a)$, nous substituons :

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varphi(x).}$$

C'est la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

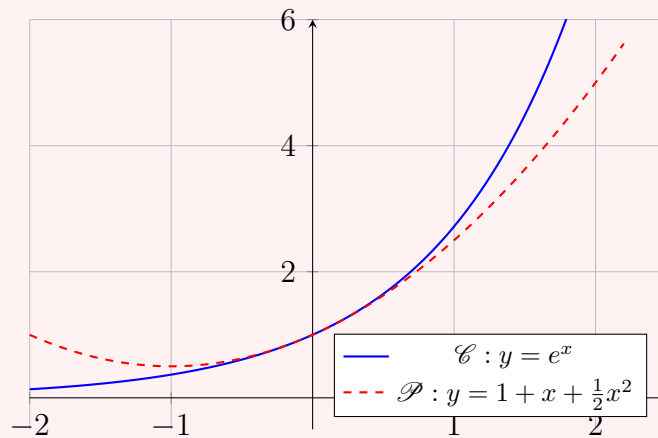
11. Applications.

- a) (1,5 pts) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction exponentielle. Illustrer graphiquement la situation.

Pour $f(x) = e^x$, on a $f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^0 = 1$ et $f''(0) = e^0 = 1$.
En appliquant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varphi(x).$$

Graphiquement, la parabole d'équation $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ « épouse » au mieux la courbe de l'exponentielle au voisinage de 0. Elle constitue une bien meilleure approximation que la simple tangente.



- b) (2 pts) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x) - 2x + x^2}{x^2}$.

▷ Pour $\cos(x)$, on calcule le $DL_2(0)$.

$$f(x) = \cos(x) \implies f(0) = 1.$$

$$f'(x) = -\sin(x) \implies f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = -\cos(x) \implies f''(0) = -1.$$

On obtient :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varphi(x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varphi(x))}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^2 - x^2\varphi(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} - \varphi(x). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

▷ Pour $\ln(1+x)$, on calcule le $DL_2(0)$.

$$g(x) = \ln(1+x) \implies g(0) = 0.$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \implies g'(0) = 1.$$

$$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies g''(0) = -1.$$

On obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varphi_2(x).$$

Le numérateur devient :

$$\begin{aligned} 2\left(x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varphi_2(x)\right) - 2x + x^2 &= 2x - x^2 + 2x^2\varphi_2(x) - 2x + x^2 \\ &= 2x^2\varphi_2(x). \end{aligned}$$

Le quotient est donc $\frac{2x^2\varphi_2(x)}{x^2} = 2\varphi_2(x)$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_2(x) = 0$, on a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x) - 2x + x^2}{x^2} = 0.}$$