



MATHÉMATIQUES

DEVOIR MAISON N° 7

À rendre le Jeudi 23 Avril 2026

Durée indicative : 8 heures

Barème : 40 points

INTÉGRALES DE WALLIS, INÉGALITÉS ANALYTIQUES ET ENDOMORPHISME INTÉGRAL

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

INDICATIONS :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être encadrés.
- Composer sur **copies doubles grand carreaux uniquement**.
- À la fin d'un exercice, on **change de page** (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part **importante** dans l'appréciation des copies.
- **En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.**

1 Étude des intégrales de Wallis (12 pts)

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx$$

Par convention, pour $n = 0$, la fonction intégrée est la fonction constante égale à 1.

Q1. Calculer les valeurs exactes de W_0 et de W_1 .

Q2. Justifier que pour tout entier naturel n , $W_n > 0$.

Q3. Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x).$$

Q4. En déduire que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q5. Justifier que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

En écrivant $\sin^{n+2}(x) = \sin(x) \times \sin^{n+1}(x)$ et en effectuant une intégration par parties, démontrer que :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^n(x) \, dx$$

Q7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

Q8. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel p :

$$W_{2p} = \frac{\binom{2p}{p} \pi}{4^p 2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{4^p}{(2p+1) \binom{2p}{p}}$$

2 Comportement asymptotique (8 pts)

On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $I_n = nW_nW_{n-1}$.

Q9. Montrer, à l'aide de la relation obtenue à la question **Q7.**, que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est constante.

Q10. En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Q11. En utilisant la décroissance de la suite (W_n) , justifier que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Q12. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n}$.

Q13. À l'aide de l'expression de I_n , montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$.

Q14. En déduire la limite de W_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3 Inégalités analytiques et sommes de Riemann (9 pts)

L'objectif de cette partie est d'établir de fines inégalités grâce à la dérivation et la convexité, pour étudier la limite d'une suite.

Q15. Justifier que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $[0, +\infty[$.

Q16. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$ au point d'abscisse 0. En déduire que pour tout $x \geq 0$:

$$\ln(1+x) \leq x$$

Q17. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Étudier les variations de g sur $[0, +\infty[$.

Q18. En déduire que pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Q19. On rappelle que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En utilisant l'encadrement obtenu à la question **Q18.**, montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq S_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Q20. En appliquant le théorème d'encadrement, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4 Un endomorphisme défini par une intégrale (11 pts)

On désigne par E l'ensemble des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On admet que muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel, $(E, +, \cdot)$ possède une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On considère l'application Φ qui, à toute fonction $f \in E$, associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Q21. Soit $f \in E$. Justifier brièvement que $\Phi(f)$ est une fonction dérivable sur $[0,1]$ et préciser sa dérivée. En déduire que $\Phi(f) \in E$.

Q22. Montrer que Φ est une application linéaire. En déduire que Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

Q23. Soit $f \in E$ telle que $\Phi(f)$ soit la fonction nulle sur $[0,1]$. En utilisant la dérivée de $\Phi(f)$, déterminer la fonction f .

Q24. En déduire le noyau de l'application Φ , noté $\ker(\Phi)$. L'application Φ est-elle injective ?

Q25. Pour toute fonction $f \in E$, que vaut $\Phi(f)(0)$?

Q26. L'application Φ est-elle surjective ? Justifier rigoureusement en donnant un contre-exemple (on pourra chercher une fonction $g \in E$ n'admettant aucun antécédent par Φ).

On cherche à déterminer s'il existe une fonction $f \in E$ non nulle et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi(f) = \lambda f$.

On suppose qu'un tel couple (f, λ) existe.

Remarque : le réel λ est appelé « valeur propre » de l'endomorphisme Φ , et la fonction f est appelée « vecteur propre » de Φ .

Q27. Montrer que si $\lambda = 0$, alors f est la fonction nulle (ce qui est exclu). On suppose donc désormais que $\lambda \neq 0$.

Q28. Justifier que f est dérivable sur $[0,1]$ et montrer que f est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' = \frac{1}{\lambda}y$$

Q29. Déterminer l'expression générale de $f(x)$ en fonction de λ et d'une constante réelle C .

Q30. En évaluant l'égalité $\Phi(f)(0) = \lambda f(0)$, déterminer la valeur de la constante C .

Q31. Conclure sur l'existence de telles fonctions invariantes non nulles.

Bon courage.