



Chapitre 1 Notions de logique, ensembles

■ Notions de logique

- **Vocabulaire** : « *assertion* » (ou « *proposition mathématique* »)

Il s'agit d'une phrase non ambiguë à laquelle est associée une valeur de vérité « vrai » ou « faux » dans le cadre d'une théorie axiomatique.

- **Définitions** :

- La négation ;
- Les connecteurs logiques (binaires) : il existe 16 connecteurs logiques binaires ; parmi ceux-ci on présente : « $\wedge$ » (conjonction), « $\vee$ » (disjonction), « $\Rightarrow$ » et « $\iff$ ».

- **Propriétés** : Le « ou » est inclusif ; on peut écrire « $A \Rightarrow B$ » sous la forme « $(\neg A) \vee B$ ».

- **Définition** : La réciproque de l'implication « $A \Rightarrow B$ » est l'implication « $B \Rightarrow A$ » (à ne pas confondre ni avec la contraposée, ni avec la négation).

Propriétés (connecteurs logiques) :

- Associativité de « $\wedge$ » et « $\vee$ » ;
- Transitivité de « $\Rightarrow$ » ;
- Distributivité de « $\wedge$ » sur « $\vee$ » ;
- Distributivité de « $\vee$ » sur « $\wedge$ ».

Propriétés (Lois de De Morgan) :

Soit A et B deux assertions. On a :

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

- **Définitions** : Référentiel ; Prédicat à une variable $\mathcal{P}(x)$; Les quantificateurs ; le quantificateur universel $\forall$, le quantificateur existentiel $\exists$. Notation $\exists!$ (traduite à l'aide de $\forall$ et $\exists$).

■ Ensembles

- **Notations** : $\in, \ni, \subset$ et $\supset$; $x \in E \iff \{x\} \subset E$.
Famille des parties d'un ensemble E : $\mathcal{P}(E)$;
 $F \subset E \iff F \in \mathcal{P}(E)$.

- **Définition (opérations usuelles dans $\mathcal{P}(E)$)** : Si A et B sont deux parties d'un ensemble E , on définit :

- La réunion : $A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$;

- L'intersection : $A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$;
- Le complémentaire dans E : $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$;
- La différence de A et B : $A \setminus B = A \cap (E \setminus B)$.

- **Vocabulaire** : Deux parties A et B sont dites *disjointes* si $A \cap B = \emptyset$ et *distinctes* si $A \neq B$.

Chapitre 2 Divers modes de raisonnement

- **Raisonnement par déduction** : $A \implies B$, exemples.
- **Raisonnement par équivalence** : $A \iff B$, exemples.
- **Raisonnement par analyse-synthèse** : Propriétés du type « $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ », exemples.
- **Raisonnement par contraposée** :
 $(\neg B \implies \neg A) \iff (A \implies B)$, exemples.

- **Raisonnement par l'absurde** : $\neg A$ faux $\iff A$ vrai, exemples.
- **Raisonnement par disjonction de cas** :
Si $(A_1 \wedge A_2 \dots) \iff A$, il suffit de montrer $A_1, A_2, \dots$, exemples.
- **Raisonnement par récurrence** : Cf. chapitre 6.

Chapitre 3 Applications

■ Correspondances, fonctions, applications

- **Définition** : Produit cartésien ; $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$; Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
- **Définition** : Une application f de E vers F est la donnée d'un triplet (Γ, E, F) où Γ est une partie de $E \times F$ telle que :
 $\forall (x, y, y') \in E \times F \times F, [(x, y) \in \Gamma \text{ et } (x, y') \in \Gamma] \implies y = y'$.
On écrit $y = f(x)$ plutôt que $(x, y) \in \Gamma$.

- **Définition** : Une application est une fonction dont l'ensemble de définition est égal à l'ensemble de départ. En pratique, on tolère l'utilisation de « fonction » et « application » indifféremment. On note l'ensemble des fonctions de E dans F par $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .
- **Définition** : L'ensemble de définition de f est :
 $\{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in \Gamma\}$.

- **Propriété** : Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $u = (\Gamma, E, F)$ une application, avec Γ le graphe de u . On a alors : $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$.

- **Définition** : L'ensemble image de f , noté $\text{Im}(f)$ ou $f(E)$ est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in E\}$.
- **Définition** : Restriction, prolongement.

■ Applications injectives, surjectives et bijectives

► Définitions :

- f injective : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f surjective : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
- f bijective : injective et surjective.

► Propriété (caractérisation des injections) :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est injective.
- (ii) Tout élément de F possède au plus un antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution.
- (iv) $\forall (x_1, x_2) \in E^2, (f(x_1) = f(x_2)) \implies x_1 = x_2$.

► Propriété (caractérisation des surjections) :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est surjective.
- (ii) Tout élément de F a au moins un antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.
- (iv) $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

► Propriété (caractérisation des bijections) :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est bijective.
- (ii) Tout élément de F a un et un seul antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution.
- (iv) $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$.

■ Composition des applications

► Définition

L'application $h : E \longrightarrow G$ définie par : $\forall x \in E, h(x) = g[f(x)]$ est appelée *composée* de f par g et notée $g \circ f$.

► Définition et propriétés

La composition des applications « $\circ$ » est une opération associative mais non commutative en général : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ mais $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

► Exemple

Composition des translations de vecteur du plan.

Propriétés (composée d'injections, surjections, bijections) :

Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Propriétés :

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

■ Application réciproque

► Définition (Application réciproque)

Soit f une bijection de E dans F . Alors, pour tout $y \in F$, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On définit ainsi une application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est aussi bijective, et qu'on appelle *application réciproque* de f .

► Exemple

La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \right.$$

est bijective et sa fonction réciproque est l'application

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right.$$

► Définition

Application identité

$$\text{Id}_E \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

Propriété (caractérisation de la fonction réciproque) :

Si $f : E \rightarrow F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective de E sur F ;
2. Il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée *fonction réciproque* de f , notée f^{-1} .

► Remarque

On peut avoir $f \circ g = \text{Id}_F$ ou $g \circ f = \text{Id}_E$ sans que f et g soient bijectives.

► Corollaire :

1. Si $f \in F^E$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. Si $u \in F^E$ et $v \in G^F$ sont deux applications bijectives, alors $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

■ Images directes et réciproques d'ensembles

► Définition (Images directe et réciproque d'une partie) :

Si $f \in F^E$, on définit :

- $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(A) = \{f(x), x \in A\}$.

- $\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

► Propriétés

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux parties de E , C et D deux parties de F .

On a alors :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $f(f^{-1}(C)) \subset C$.
6. $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

■ Fonction indicatrice (ou caractéristique)

- **Définition :** Soit $A \subset E$. La *fonction indicatrice* de A , ou encore *fonction caractéristique* de A , est la fonction de E dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

- **Propriété :** Si A et B sont deux parties de E , on a :

1. pour l'intersection : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
2. pour la réunion : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$,
3. pour le complémentaire : $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$.

- **Remarque :** Pour un ensemble fini, on a la relation :

$$\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = \text{card}(A).$$

Propriété : L'application

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

est une bijection.

■ Familles indexées

- **Définition :** Si I est un ensemble quelconque, une application de I dans E est aussi appelée *famille d'éléments* de E indexée par I .

- **Notation :** L'utilisation du terme famille sous-entend que l'on utilise la notation indexée $(x_i)_{i \in I}$ au lieu de la notation fonctionnelle, bien qu'il s'agisse d'une application.

- **Exemple :** Une suite d'éléments de E est une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$: on la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- **Vocabulaire :** Si $I = \llbracket 1, p \rrbracket$, alors une famille d'éléments de E indexée par I est aussi appelée *p-liste* ou *p-uplet*.

- **Notation :** La famille $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ se note couramment $(x_1, \dots, x_p)$, et l'ensemble $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{\llbracket 1, p \rrbracket}$ se note plus simplement $\mathbb{R}^p$.

- **Définition :** Si $J \subset I$, la famille $(x_i)_{i \in J}$ est appelée *sous-famille* de $(x_i)_{i \in I}$.

- **Propriétés :** Généralisation de l'union et de l'intersection aux familles de parties de E .

- Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

- Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).

- Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement!).