Chapitre 8 **Suites**

Suites convergentes

- **Exemple :** $2 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
- **Définition (suite convergente) :** Soient (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

  La suite (u_n) *converge* vers le réel ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

  On note dans ce cas :

  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

  ce qui peut s'écrire formellement :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- **Remarque :** Nous pouvons aussi énoncer cette définition par :

  Tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- **Exemple :** $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Propriété (suites de référence de limite nulle en $+\infty$) : On dispose des résultats suivants :
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Propriété (unicité de la limite) : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Si cette suite converge vers un réel ℓ, alors cette limite est unique.

- **Propriété (opérations sur les limites) :** Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ'. Nous avons
  - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
  - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha u_n = \alpha\ell$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \ell\ell'$.
  - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$, à condition que $\ell' \neq 0$.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.
Si
- les suites (v_n) et (w_n) convergent vers ℓ,
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,

alors la suite (u_n) converge vers ℓ.
En d'autres termes,

$$\left(\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell\right) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant u_n \leqslant w_n)$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

- **Remarque :** Le théorème demeure vrai en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- **Exemple :** $\dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- **Corollaire :** Soient (u_n), (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.
  Si

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

  alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Théorème de passage à la limite sur une inégalité : Soient (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$, et ℓ un réel.
Si
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$,
- (u_n) converge vers ℓ,

alors $\ell \geqslant 0$.

- **Remarque :** Nous retiendrons que le passage à la limite sur une inégalité stricte restitue une inégalité large.
- **Corollaire :** Soient (u_n), (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$, ℓ et ℓ' deux réels.
  Si
  - les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ',
  - $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > v_n$,

  alors $\ell \geqslant \ell'$.

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

- **Remarque :** La réciproque est fausse. Contre exemple : la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$, est bornée par -1 et 1 mais elle diverge puisque cette suite n'a pas de limite en $+\infty$.

Suites divergentes vers l'infini

- **Exemple :** $\frac{1}{4}n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- **Définition (divergence vers $+\infty$) :** Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
  On dit que cette suite admet pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ou *diverge* vers $+\infty$, si et seulement si, quel que soit le réel $a > 0$, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiennent à l'intervalle $]a, +\infty[$.
  Dans ce cas, on note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
  En d'autres termes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ équivaut à
  $$\forall\, a > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\, \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \in]a, +\infty[.$$
- **Définition (divergence vers $-\infty$) :** Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
  On dit que cette suite admet pour limite $-\infty$ quand n tend vers $-\infty$, ou *diverge* vers $-\infty$, si et seulement si, quel que soit le réel $a > 0$, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiennent à l'intervalle $]-\infty, a[$.
  Dans ce cas, on note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$
  En d'autres termes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ équivaut à
  $$\forall\, a > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\, \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \in]-\infty, -a[.$$
- **Remarque :** Nous disposons de l'équivalence suivante :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty.$$

Propriété (suites de référence de limite infinie en $+\infty$) :
Nous disposons des résultat suivants :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, avec $k \in \mathbb{N}^*$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Théorème de comparaison : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- **Exemple :** $n^2 + (-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Limite d'une suite géométrique

Théorème (limite de q^n) :
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}$.
Nous disposons de la disjonction suivante :
- si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- si $q < -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite en $+\infty$.

Propriété (limite de la somme des termes d'une suite géométrique) : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

- **Exemple :** Nous avons
  $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Limite et monotonie

Théorème de la convergence monotone : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente.

- **Remarques :**
  - Ce résultat est important car il permet de prouver l'existence implicite d'une limite ℓ, sans expliciter le réel ℓ.
  - Les réciproques sont fausses.
  - Par contre, une suite convergente est bornée comme vu plus haut.
- **Exemple :** La suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ étant croissante et majorée par 3, elle converge.
- **Théorème :** Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
  - Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
  - Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Chapitre 22 **PGCD de deux entiers**

Plus grand commun diviseur

- **Exemple :** $\operatorname{pgcd}(63,45) = 9$.
- **Remarques :**
  - On peut définir $\operatorname{pgcd}(a,b)$ en se restreignant à $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
  - Nous savons que $\operatorname{Div}(0) = \mathbb{Z}$ donc, quel que soit $a \in \mathbb{N}^*$,
  $$\operatorname{Div}(0) \cap \operatorname{Div}(a) = \operatorname{Div}(a).$$
  - Comme dans $\mathbb{N}$, nous disposons dans $\mathbb{Z}$ de l'axiome qui suit :

  > Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

- **Propriété :** Soient a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément.
- **Définition (PGCD) :** Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
  Le *plus grand commun diviseur* de a et b, noté $\operatorname{pgcd}(a,b)$, est le plus grand élément de $\operatorname{Div}(a) \cap \operatorname{Div}(b)$.
- **Remarque :** $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(|a|,|b|)$.
- **Propriété :** Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Nous disposons des trois propriétés suivantes :
  - $\operatorname{pgcd}(a,0) = a$.
  - $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(b,a)$.
  - $\operatorname{pgcd}(a,b) \geqslant 1$.
- **Propriété :** Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si a divise b, alors nous disposons des deux propriétés suivantes :
  - $\operatorname{Div}(a) \cap \operatorname{Div}(b) = \operatorname{Div}(a)$,
  - $\operatorname{pgcd}(a,b) = a$.
- **Corollaire :** Quel que soit $a \in \mathbb{N}^*$, nous avons
$$\operatorname{pgcd}(a,a) = a \quad \text{et} \quad \operatorname{pgcd}(a,1) = 1$$
- **Exemple :** Puisque $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$, nous en déduisons
$$\operatorname{pgcd}\left(n^3 - n, n\right) = n$$
$$\operatorname{pgcd}\left(n^3 - n, n+1\right) = n+1$$
$$\operatorname{pgcd}\left(n^3 - n, n-1\right) = n-1$$

Lemme d'Euclide : Soient a et b deux entiers naturels non nuls et r le reste de la division euclidienne de a par b. Nous disposons des deux propriétés suivantes :
- $\operatorname{Div}(a) \cap \operatorname{Div}(b) = \operatorname{Div}(b) \cap \operatorname{Div}(r)$
- $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(b,r)$

- **Remarque :** Le lemme d'Euclide est un résultat important car il permet de traiter la plupart des questions au sujet du pgcd. C'est la « pierre angulaire » de la mise en place de l'algorithme d'Euclide.

Algorithme d'Euclide : Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
En effectuant la division euclidienne de a par b, le $\operatorname{pgcd}(a,b)$ est le dernier reste non nul de l'itération de la division euclidienne du diviseur et du reste de la division précédente.

- **Corollaire :** Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Nous disposons de la propriété suivante :

tout diviseur commun à a et b est un diviseur de leur pgcd.

En d'autres termes, si $d = \operatorname{pgcd}(a,b)$, alors nous avons
$$\operatorname{Div}(a) \cap \operatorname{Div}(b) = \operatorname{Div}(d).$$

- **Algorithme (script Python de l'algorithme d'Euclide) :**

```python
def pgcd(a,b):
    while b!=0:
        r=a%b
        a=b
        b=r
    return a
```

! ► Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

► Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).
► Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).