Chapitre 9 Limite d'une fonction

Limite finie en un point

▶ **Définition (limite finie en un point) :** Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.
On dit que f admet pour limite ℓ en a si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} \big(f(a+h) - \ell\big) = 0.$$

Dans ce cas, nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Formellement, cela équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, |x-a| < r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

▶ **Propriété :** Avec les données de la définition, si la fonction f admet une limite ℓ en a et si f est définie en a, alors $\ell = f(a)$.

Propriété (unicité de la limite) : Avec les données de la définition, si la fonction f admet une limite ℓ en a, cette limite est unique.

▶ **Propriété (opérations sur les limites) :** Soient a, ℓ et ℓ' trois réels. On considère deux fonctions f et g définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, alors :

- $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + \ell'$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda \ell$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$.
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

▶ **Définition (limite à droite, limite à gauche) :** Soit f une fonction définie sur une partie D de R et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

- Un réel ℓ est la *limite à droite (ou par valeurs supérieures)* de f en a si, et seulement si, la restriction de f à $D \cap]a, +\infty[$ admet ℓ pour limite en a.
Cette limite à droite est notée

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell.$$

En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- Un réel ℓ est la *limite à gauche (ou par valeurs inférieures)* de f en a si, et seulement si, la restriction de f à $D \cap]-\infty, a[$ admet ℓ pour limite en a.
Cette limite à gauche est notée

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell.$$

En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, -r < x - a < 0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

▶ **Propriété :** Avec les données de la définition, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$

▶ **Remarques :**

- Si f est définie en a, alors nous obtenons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell = f(a).$$

- La négation de (ii) permet de justifier facilement qu'une fonction n'a pas de limite en a.

▶ **Exemple :** l'échelon unité n'admet pas de limite en 0.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) : Soient ℓ un réel, f, g, h trois fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.
Si

- $\forall x \in D,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$

alors la fonction f admet une limite en a et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

▶ **Corollaire :** Soient ℓ un réel, f et u deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si

- $\forall x \in D,\ |f(x) - \ell| \leqslant u(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

▶ **Remarque :** Si les inégalités sont strictes, le théorème d'encadrement et son corollaire restent vrais.

Théorème de passage à la limite sur une inégalité : Soient ℓ un réel, f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.
Si

- $\forall x \in D,\ f(x) > 0$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

alors $\ell \geqslant 0$.

▶ **Remarque :** Nous retiendrons que le passage à la limite sur une inégalité stricte restitue une inégalité large.

Limite finie en $\pm\infty$

- **Exemple :** $\dfrac{2x-1}{x-1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 2$.
- **Définition (limite finie en $+\infty$) :** Soient a et ℓ deux réels. Une fonction f définie sur un intervalle I de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$, a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \quad \text{ou} \quad f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell,$$

si, et seulement si

$$\forall\,\varepsilon>0,\,\exists\,A\in I,\,\forall\,x\geqslant A,\,|f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

- **Définition (limite finie en $-\infty$) :** Soient a et ℓ deux réels. Une fonction f définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,a[$, a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \quad \text{ou} \quad f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\ell,$$

si, et seulement si

$$\forall\,\varepsilon>0,\,\exists\,A\in I,\,\forall\,x\leqslant A,\,|f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

Propriété (unicité de la limite en $\pm\infty$) : Si une fonction admet une limite finie en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors cette limite est unique.

- **Propriété (limites nulles de référence en $\pm\infty$) :** Soient $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Nous disposons des résultats suivants :
  - $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+a)^n}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x+a)^n}=0,$$
    $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=0.$$
  - En particulier, pour $a=0$,
    $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0,$$
    $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$
- **Remarque :** En $-\infty$ ou en $+\infty$, les opérations sur les limites exposées dans le cas de limites finies en a restent vraies.
- **Définition (asymptote horizontale) :** Soit $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal.
  Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$, alors la droite d'équation $y=\ell$ est une *asymptote horizontale* pour la courbe $\mathcal{C}_f$, en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).
- **Remarque :** L'étude du signe de $f(x)-\ell$ détermine la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale. Plus précisément :
  - si $f(x)-\ell>0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote horizontale,
  - si $f(x)-\ell<0$, alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son asymptote horizontale.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) : Soient ℓ et a deux réels, f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$.
Si
- $\forall\,x\in I,\, g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$

alors la fonction f admet une limite en $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell.$$

- **Corollaire :** Soient ℓ et a deux réels, f et u deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$.
  Si
  - $\forall\,x\in I,\,|f(x)-\ell|\leqslant u(x)$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$

  alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- **Remarque :** Si les inégalités sont strictes, le théorème d'encadrement et son corollaire restent vrais.
- **Exemple :** $\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ et $\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$; l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $\pm\infty$ pour la courbe de $x\longmapsto\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$.
- **Propriété (passage à la limite sur une inégalité) :** Soient ℓ et a deux réels, f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$.
  Si
  - $\forall\,x\in I,\, f(x)>0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

  alors $\ell\geqslant 0$.
- **Remarque :** Cette proposition reste vraie en $-\infty$.

Limite infinie en $\pm\infty$

- **Exemple :** $x^2\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$.
- **Définition (limite infinie en $+\infty$) :** Soit un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$.
  - La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, ce que l'on note
    $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad\text{ou}\quad f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,$$
    si, et seulement si :
    $$\forall\,A>0,\,\exists\,B\in I,\,\forall\,x>B,\; f(x)>A.$$
  - La fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, ce que l'on note
    $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad\text{ou}\quad f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty,$$
    si, et seulement si :
    $$\forall\,A>0,\,\exists\,B\in I,\,\forall\,x>B,\; f(x)<-A.$$
- **Définition (limite infinie en $-\infty$:** Soit un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,a[$.
  - La fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, ce que l'on note
    $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad\text{ou}\quad f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x < B, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x < B, f(x) < -A.$$

▶ **Propriété (limites infinies de référence en l'infini) :** Pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

▶ **Propriété (limite d'une fonction polynomiale) :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, le n-uplet $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ et $p : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$, un polynôme de degré n.
Nous avons :

- $$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ +\infty & \text{si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases}$$

▶ **Remarque :** Nous retiendrons cette proposition en se souvenant que la limite infinie d'un polynôme est la limite de son terme $a_n x^n$ de plus haut degré, en $-\infty$ ou $+\infty$. On dit aussi qu'un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, en $-\infty$ ou $+\infty$.

Théorème de comparaison en $+\infty$: Soient un réel a, f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$.
Si

- $\forall x \in I, f(x) \geqslant g(x)$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

▶ **Remarque :** Ce théorème de comparaison s'étend aux fonctions qui tendent vers $-\infty$ en $+\infty$, ainsi que celles qui tendent vers $\pm\infty$ en $-\infty$.

▶ **Exemple :** $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2-\sin(2x)} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2-\sin(2x)} = -\infty$.

Lemme : Nous disposons de l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x > x.$$

Propriété (limite de $\exp$ en $+\infty$) : Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

▶ **Propriété (limite de $\exp$ en $-\infty$) :** Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

▶ **Définition (asymptote oblique) :** Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$ et f une fonction admettant une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.
La droite $(d) : y = ax + b$ est une asymptote oblique pour la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, et seulement si :

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0\right).$$

▶ **Remarques :**

- Lorsque $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction ayant une limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ n'admet pas obligatoirement une droite asymptote.
- La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote est déterminée dans chaque cas par l'étude du signe de $f(x) - (ax+b)$.
- La droite $(d) : y = ax + b$ est une asymptote oblique pour la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) = ax + b + \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0$).

■ Limite infinie en un point

▶ **Exemple :** $\lim_{x\to1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$

▶ **Définitions :** Soient un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I ouvert en a.

- La fonction f a pour *limite $+\infty$ en a à droite*, notée $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a,a+h[, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour *limite $-\infty$ en a à droite*, notée $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a,a+h[, f(x) < -A.$$

- La fonction f a pour *limite $+\infty$ en a à gauche*, notée $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a-h,a[, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour *limite $-\infty$ en a à gauche*, notée $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a-h,a[, f(x) < -A.$$

▶ **Remarque :** Avec les données des définitions ci-dessus,

- La fonction f a pour limite $+\infty$ en a, notée $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si et seulement si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.
- La fonction f a pour limite $-\infty$ en a, notée $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si et seulement si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

▶ **Propriété (limite infinie de référence en un point) :** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons des résultats suivants :

- $$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty.$$

- En particulier, pour $a = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

▶ **Définition (asymptote verticale) :** Soient un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I ouvert en a.

La droite $(d) : x = a$ est une asymptote verticale pour la courbe $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, au moins une de ces conditions est vérifiée :

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

■ Opérations sur les limites

Théorème (composition de limites) : Soient a, ℓ et ℓ' trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
Soient u une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J.
On suppose que la condition suivante est réalisée :

$$\forall\, x \in I, \quad u(x) \in J.$$

Si

$$\lim_{x \to a} u(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{X \to \ell} g(X) = \ell',$$

alors

$$\lim_{x \to a} g\big(u(x)\big) = \lim_{x \to a} (g \circ u)(x) = \ell'.$$

▶ **Exemple :** Le facteur de Lorentz $\gamma(v) \xrightarrow[v \to +c^-]{} +\infty$.

■ Limite de la composée d'une suite par une fonction

▶ **Propriété :** Soient ℓ et ℓ' deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, g une fonction définie sur un intervalle I, (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On suppose que la condition suivante est réalisée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

Si

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad g(X) \xrightarrow[X \to \ell]{} \ell',$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = \ell'.$$

▶ **Exemple :** $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$.

▶ **Remarques :** La contraposition de cet énoncé permet de prouver qu'une fonction n'a pas de limite.

Avec les notations de l'énoncé, la forme contraposée est :

Si $g(u_n)$ n'a pas de limite, alors (u_n) n'a pas de limite en $+\infty$ ou la fonction g n'a pas de limite en ℓ.

▶ **Exemple :** Les fonctions sin et cos n'ont pas de limite en $+\infty$.

■ Formes indéterminées exponentielles

Lemme : Nous disposons de l'inégalité suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x > \frac{x^2}{2}.$$

Propriété : Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

▶ **Remarques :**

- Graphiquement, cette limite signifie que, x étant un réel suffisamment grand, la pente de la droite passant par les points d'abscisses x sur la droite d'équation $y = x$ et sur la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ est aussi grande que l'on veut.
On dit dans ce cas que la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ admet une *branche parabolique* de direction (Oy), en $+\infty$.
- Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, ce qui signifie que la fonction $x \longmapsto e^x$ a une croissance « beaucoup » plus rapide que la fonction $x \longmapsto x$, et par conséquent « l'emporte sur x », en $+\infty$.
- Nous retiendrons que par inverse, nous disposons également de la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

- Sans indétermination, nous avons par quotient :
  - $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$

Propriété (croissance comparée de la fonction exp **avec** $x \mapsto x^n$**) :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

- **Remarque :** Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, car la fonction $x \longmapsto e^x$ a une croissance « beaucoup » plus rapide que la fonction $x \longmapsto x^n$ et par conséquent, la fonction exp « l'emporte » sur les fonctions puissances, en $+\infty$.
- **Exemple :** $e^x - 2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
- **Exemple :** $\dfrac{4x^2 + x}{e^{2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
- **Exemple :** $\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) \exp\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
- **Propriété :** Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0.$$

Propriété (limite de $x^n e^x$ en $+\infty$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

- **Remarque :** Nous retenons ce résultat en exprimant que, par croissance comparée, l'exponentielle « l'emporte » sur les fonctions puissances, en $-\infty$.
- **Exemple :** $\left(x^2 - \dfrac{2}{x^2}\right) e^x + 2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$.

Propriété : Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

- **Remarque :** En posant, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\varepsilon(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 1,$$

nous en déduisons

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

ce qui restitue la fonction $x \longmapsto x + 1$ qui est l'approximation affine tangente en 0 de la fonction exp.
On dit aussi que $x \longmapsto x + 1$ est le développement limité d'ordre 1 en 0 ($\mathrm{DL}_1(0)$) de la fonction exp.

!

► Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

► Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).
► Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).