Chapitre 9 **Limite d'une fonction**

Limite de la composée d'une suite par une fonction

- **Propriété :** Soient ℓ et ℓ' deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, g une fonction définie sur un intervalle I, (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
  On suppose que la condition suivante est réalisée :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$
  Si
  $$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad g(X) \xrightarrow[X\to\ell]{} \ell',$$
  alors
  $$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \ell'.$$

- **Exemple :** $n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$.
- **Remarques :** La contraposition de cet énoncé permet de prouver qu'une fonction n'a pas de limite.

  Avec les notations de l'énoncé, la forme contraposée est :

  Si $g(u_n)$ n'a pas de limite, alors (u_n) n'a pas de limite en $+\infty$ ou la fonction g n'a pas de limite en ℓ.
- **Exemple :** Les fonctions sin et cos n'ont pas de limite en $+\infty$.

Formes indéterminées exponentielles

Lemme : Nous disposons de l'inégalité suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x > \frac{x^2}{2}.$$

Propriété : Nous disposons de la limite suivante :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

- **Remarques :**
  - Graphiquement, cette limite signifie que, x étant un réel suffisamment grand, la pente de la droite passant par les points d'abscisses x sur la droite d'équation $y = x$ et sur la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ est aussi grande que l'on veut.
    On dit dans ce cas que la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ admet une *branche parabolique* de direction (Oy), en $+\infty$.
  - Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, ce qui signifie que la fonction $x \longmapsto e^x$ a une croissance « beaucoup » plus rapide que la fonction $x \longmapsto x$, et par conséquent « l'emporte sur x », en $+\infty$.
  - Nous retiendrons que par inverse, nous disposons également de la limite suivante :
    $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$
  - Sans indétermination, nous avons par quotient :
    - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$
    - $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$
    - $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$

Propriété (croissance comparée de la fonction exp avec $x \mapsto x^n$) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

- **Remarque :** Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, car la fonction $x \longmapsto e^x$ a une croissance « beaucoup » plus rapide que la fonction $x \longmapsto x^n$ et par conséquent, la fonction exp « l'emporte » sur les fonctions puissances, en $+\infty$.
- **Exemple :** $e^x - 2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- **Exemple :** $\dfrac{4x^2 + x}{e^{2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- **Exemple :** $\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) \exp\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- **Propriété :** Nous disposons de la limite suivante :
  $$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.$$

Propriété (limite de $x^n e^x$ en $+\infty$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons de la limite suivante
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

- **Remarque :** Nous retenons ce résultat en exprimant que, par croissance comparée, l'exponentielle « l'emporte » sur les fonctions puissances, en $-\infty$.
- **Exemple :** $\left(x^2 - \dfrac{2}{x^2}\right) e^x + 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$.

Propriété : Nous disposons de la limite suivante :
$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

- **Remarque :** En posant, pour tout réel $x \neq 0$,
  $$\varepsilon(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 1,$$

nous en déduisons

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

ce qui restitue la fonction $x \longmapsto x + 1$ qui est l'approximation affine tangente en 0 de la fonction exp.
On dit aussi que $x \longmapsto x+1$ est le développement limité d'ordre 1 en 0 ($\mathrm{DL}_1(0)$) de la fonction exp.

Chapitre 10 **Continuité**

■ Continuité d'une fonction en un point

► **Définition (continuité) :** Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est *continue en un réel* $a \in I$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

► **Remarques :**

- Retenir que la continuité en a impose que la fonction f est *définie* en a.
- Si l'intervalle I est fermé, par exemple $I = [a,b]$, on dit que
  - f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$,
  - f est continue à gauche en b si et seulement si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- f est continue en a si et seulement si f est *continue à droite et à gauche en* a. La négation de cette remarque est importante pour justifier notamment la discontinuité d'une fonction en un point.

► **Propriété :** Dans les conditions de la définition ci-dessus, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a,

(ii) $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

► **Propriété (continuité des fonctions de référence) :** Les fonctions de références c'est-à-dire les fonctions constantes, linéaires, carré, inverse, racine carrée, cosinus, sinus, tangente et exponentielle sont continues en tout point où elles sont définies.

► **Propriété (continuité sur $\mathbb{R}$ de la valeur absolue) :** Quel que soit le réel a, la fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est continue en a.

► **Exemple :** Discontinuité de la fonction échelon unité en 0.

► **Notation :** Définition des espaces de fonctions $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Propriété (continuité et dérivabilité en un point) : Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Autrement dit :

$$\mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

► **Remarque :** Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : la fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est continue mais n'est pas dérivable en 0.

► **Remarque :** Nous disposons de la relation par récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I).$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{D}^n(I)$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{C}^0(I)$, ce qui entraîne la stabilité par combinaisons linéaires des propriétés de continuité et de dérivabilité.

► **Propriété (opérations sur les fonctions continues en un point) :** Soient un réel λ, u et v deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, continues en $a \in I$.
Les fonctions

- $u + v$
- λu
- $u \cdot v$
- $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$, avec $v(a) \neq 0$

sont continues en a.

► **Corollaire :** Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues en tout point où elles sont définies.

► **Propriété (composition et continuité en un point) :** Soient u une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$, g une fonction définie sur un intervalle J.
Nous supposons que $u(a) \in J$.
Si u est continue en a et g est continue en $u(a)$, alors $g \circ u$ est continue en a.
Autrement dit, si $u(I) \subset J$:

$$\big(u \in \mathcal{C}^0(I)\big) \wedge \big(g \in \mathcal{C}^0(J)\big) \implies g \circ u \in \mathcal{C}^0(I).$$

► **Corollaire :** Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert et continue en $a \in I$.
Sous réserve d'être définies en a, les fonctions

$$\begin{aligned}
&x \longmapsto u^n(x), \text{ avec } n \in \mathbb{Z},\\
&x \longmapsto \sqrt{u(x)},\\
&x \longmapsto \cos\big(u(x)\big),\\
&x \longmapsto \sin\big(u(x)\big),\\
&x \longmapsto \tan\big(u(x)\big),\\
&x \longmapsto \exp\big(u(x)\big),
\end{aligned}$$

sont continues en a.

► **Propriété (composition d'une suite par une fonction continue) :** Soient g une fonction définie sur un intervalle ouvert I, (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et un réel $\ell \in I$.
On suppose que la condition suivante est réalisée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et g est continue en ℓ, alors

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = g(\ell) = g\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right).$$

▶ **Corollaire :** Les données sont celles de la proposition précédente.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^p = \ell^p$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\ell} \quad \text{avec } u_n \geqslant 0,\ \ell \geqslant 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(u_n)^p} = \frac{1}{\ell^p} \quad \text{avec } u_n \neq 0,\ \ell \neq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \cos u_n = \cos \ell$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin u_n = \sin \ell$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tan u_n = \tan \ell$$

$$\lim_{n\to+\infty} \exp(u_n) = e^\ell$$

Propriété (suite récurrente et fonction continue en un point) : Soient g une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $\ell \in I$.
Étant donnée une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ satisfaisant à

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$
- u_0 est donné
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$.

Si (u_n) converge vers ℓ et si g est continue en ℓ, alors $\ell = g(\ell)$.

▶ **Remarques :**

- Avec les données de la proposition, le réel ℓ est une solution dans l'intervalle I de l'équation $g(x) = x$.
- La réciproque est fausse, c'est-à-dire l'équation $g(x) = x$ peut avoir un ensemble non vide de solutions bien que la suite (u_n) diverge.
- Par négation de la proposition précédente, si l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solution dans l'intervalle I, alors la suite (u_n) diverge.

!

▶ Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

▶ Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ±15 min).
▶ Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).