Chapitre 10 Continuité

Continuité d'une fonction en un point

- **Définition (continuité) :** Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est *continue en un réel* $a \in I$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- **Remarques :**
  - Retenir que la continuité en a impose que la fonction f est *définie* en a.
  - Si l'intervalle I est fermé, par exemple $I = [a,b]$, on dit que
    - f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$,
    - f est continue à gauche en b si et seulement si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
  - f est continue en a si et seulement si f est *continue à droite et à gauche en* a. La négation de cette remarque est importante pour justifier notamment la discontinuité d'une fonction en un point.
- **Propriété :** Dans les conditions de la définition ci-dessus, les trois propositions suivantes sont équivalentes :
  - (i) f est continue en a,
  - (ii) $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$,
  - (iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- **Propriété (continuité des fonctions de référence) :** Les fonctions de références c'est-à-dire les fonctions constantes, linéaires, carré, inverse, racine carrée, cosinus, sinus, tangente et exponentielle sont continues en tout point où elles sont définies.
- **Propriété (continuité sur $\mathbb{R}$ de la valeur absolue) :** Quel que soit le réel a, la fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est continue en a.
- **Exemple :** Discontinuité de la fonction échelon unité en 0.
- **Notation :** Définition des espaces de fonctions $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Propriété (continuité et dérivabilité en un point) : Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Autrement dit :

$$\mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

- **Remarque :** Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : la fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est continue mais n'est pas dérivable en 0.
- **Remarque :** Nous disposons de la relation par récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I).$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{D}^n(I)$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{C}^0(I)$, ce qui entraîne la stabilité par combinaisons linéaires des propriétés de continuité et de dérivabilité.

- **Propriété (opérations sur les fonctions continues en un point) :** Soient un réel λ, u et v deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, continues en $a \in I$.
  Les fonctions
  - $u + v$
  - λu
  - $u \cdot v$
  - $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$, avec $v(a) \neq 0$

  sont continues en a.
- **Corollaire :** Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues en tout point où elles sont définies.
- **Propriété (composition et continuité en un point) :** Soient u une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$, g une fonction définie sur un intervalle J.
  Nous supposons que $u(a) \in J$.
  Si u est continue en a et g est continue en $u(a)$, alors $g \circ u$ est continue en a.
  Autrement dit, si $u(I) \subset J$:

$$\big(u \in \mathcal{C}^0(I)\big) \wedge \big(g \in \mathcal{C}^0(J)\big) \implies g \circ u \in \mathcal{C}^0(I).$$

- **Corollaire :** Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert et continue en $a \in I$.
  Sous réserve d'être définies en a, les fonctions

$$\begin{aligned} &x \longmapsto u^n(x), \text{ avec } n \in \mathbb{Z}, \\ &x \longmapsto \sqrt{u(x)}, \\ &x \longmapsto \cos\big(u(x)\big), \\ &x \longmapsto \sin\big(u(x)\big), \\ &x \longmapsto \tan\big(u(x)\big), \\ &x \longmapsto \exp\big(u(x)\big), \end{aligned}$$

  sont continues en a.
- **Propriété (composition d'une suite par une fonction continue) :** Soient g une fonction définie sur un intervalle ouvert I, (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et un réel $\ell \in I$.
  On suppose que la condition suivante est réalisée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

  Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et g est continue en ℓ, alors

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = g(\ell) = g\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right).$$

- **Corollaire :** Les données sont celles de la proposition précédente.

  Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^p = \ell^p$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\ell} \quad \text{avec } u_n \geqslant 0,\ \ell \geqslant 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(u_n)^p} = \frac{1}{\ell^p} \quad \text{avec } u_n \neq 0,\ \ell \neq 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \cos u_n = \cos \ell$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sin u_n = \sin \ell$$
$$\lim_{n\to+\infty} \tan u_n = \tan \ell$$
$$\lim_{n\to+\infty} \exp(u_n) = e^{\ell}$$

Propriété (suite récurrente et fonction continue en un point) : Soient g une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $\ell \in I$.
Étant donnée une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ satisfaisant à
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$
- u_0 est donné
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$.

Si (u_n) converge vers ℓ et si g est continue en ℓ, alors $\ell = g(\ell)$.

- **Remarques :**
  - Avec les données de la proposition, le réel ℓ est une solution dans l'intervalle I de l'équation $g(x) = x$.
  - La réciproque est fausse, c'est-à-dire l'équation $g(x) = x$ peut avoir un ensemble non vide de solutions bien que la suite (u_n) diverge.
  - Par négation de la proposition précédente, si l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solution dans l'intervalle I, alors la suite (u_n) diverge.

Continuité sur un intervalle

- **Définition :** Une fonction f est *continue sur un intervalle ouvert* I si et seulement si quel que soit le réel $a \in I$, f est continue en a.
- **Remarques :**
  - Si I est semi-fermé ou fermé, par exemple $I = [\alpha,\beta]$, f est continue sur I si et seulement si
    - f est continue sur $]\alpha,\beta[$,
    - f est continue à droite en α,
    - f est continue à gauche en β.
  - D'une façon imagée, f est continue sur un intervalle I signifie que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ peut être dessinée, « sans lever le crayon ».
- **Exemples :**
  - L'image de l'intervalle $[-1,2]$ par l'échelon unité (discontinu en 0) est $\{0,1\}$.
    Nous observons graphiquement que $U([-2,1])$ n'est pas un intervalle.
  - Exemples graphiques de fonctions discontinues dont l'image n'est pas un intervalle, et de fonctions continues dont l'image est un intervalle.

Méthode de dichotomie (ou Théorème de Bolzano) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.
Si $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors

$$\exists\, c \in [a,b], \quad f(c) = 0.$$

En d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

- **Algorithme de dichotomie :**

```
def dicho(f,a,b,p) :
    while b-a > 10**(-p) :
        m-(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0 :
            b=m
        else :
            a=m
    return b
```

- **Exemple :** On trouve à l'aide de cet algorithme une valeur approchée de la solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = k.$$

- **Remarques :**
  - Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) signifie que, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$ mais l'unicité de cette solution n'est pas garantie par ce théorème. On a donc la surjectivité de la restriction $f|_{[a,b]}$.
  - Lorsque $k = 0$, nous retrouvons le théorème de Bolzano, qui est donc un cas particulier du TVI.
  - Le théorème des valeurs intermédiaires donne une preuve de l'existence *implicite* d'au moins une solution de l'équation $f(x) = k$, ce qui signifie, en général, qu'une résolution algébrique de cette dernière est impossible. Une méthode comme la dichotomie est alors privilégiée. Elle permet d'approximer avec une précision donnée une solution localisée par les valeurs intermédiaires de l'équation $f(x) - k = 0$.
  - La condition de continuité de f est essentielle pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
  - Si $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, nous pouvons observer graphiquement que l'intervalle $\big[f(a),f(b)\big]$ (respectivement $\big[f(b),f(a)\big]$ est inclus dans $f\big([a,b]\big) = [m,M]$.
- **Propriété (image d'un intervalle quelconque) :** Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.
- **Remarque :** Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas toujours de même nature.

  Par exemple, $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$ et $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Lemme (caractérisation séquentielle de la borne supérieure) : Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A.
Nous disposons de l'équivalence suivante :

$$M = \sup A \iff \exists\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = M.$$

► **Remarque :** On dispose évidemment de la caractérisation équivalente pour la borne inférieure.

Propriété (image d'un intervalle fermé) : Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$, alors $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle fermé.
Plus précisément, si f est continue sur $[a,b]$, alors $f\big([a,b]\big) = [m,M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a,b]$.

► **Remarques :**
- Nous rappelons que
  - le minimum m est atteint par f sur $[a,b]$, c'est-à-dire :
  $$\exists\,\alpha \in [a,b], \quad f(\alpha) = m.$$
  - le maximum M est atteint par f sur $[a,b]$, c'est-à-dire :
  $$\exists\,\beta \in [a,b], \quad f(\beta) = M.$$
- La réciproque de cette proposition est fausse.

► **Propriété :** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a,b]$.
Nous disposons de la propriété suivante :
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a,b]$ tel que

$$f(x) = k.$$

► **Remarques :**
- Si f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$, l'image de cet intervalle est l'intervalle fermé $f\big([a,b]\big) = \big[f(a),f(b)\big]$.
  Dans ce cas, la proposition précédente signifie également :
  $$\forall\,k \in \big[f(a),f(b)\big],\ \exists!\,c \in [a,b], \quad f(c) = k,$$
  ce qui correspond à la définition de $f|_{[a,b]}$ bijection de $[a,b]$ sur $\big[f(a),f(b)\big]$.
- Si f est strictement décroissante sur $[a,b]$, sa restriction à $[a,b]$, $f|_{[a,b]}$, est aussi une bijection, cette fois de $[a,b]$ sur $\big[f(b),f(a)\big]$.

Théorème de la bijection : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I quelconque, alors f est une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$, ce qui signifie

$$\forall\,y \in f(I),\ \exists!\,x \in I, \quad f(x) = y.$$

► **Remarques :**
- Selon la nature de l'intervalle I, l'intervalle $f(I)$ est déterminé dans le contexte.
  Par exemple :
  - si f est croissante strictement et continue sur $I =]a,b[$, alors
  $$f(I) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$$
  - si f est décroissante strictement et continue sur $I =]a,+\infty[$, alors
  $$f(I) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$$
  - si f est croissante strictement et continue sur $I =]-\infty,+\infty[$, alors
  $$f(I) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[.$$
- Le théorème de la bijection est particulièrement important car il permet la construction de nouvelles fonctions de référence.

► **Exemples :** fonction racine carrée, fonction logarithme népérien.

Fonction racine n-ième

Propriété : Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et un réel $a \geqslant 0$.
L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

► **Définition (fonction racine n-ième) :** Soit un entier $n \geqslant 2$.
Pour chaque réel $a \in \mathbb{R}_+$, la *racine n-ième* du réel a, notée $\sqrt[n]{a}$, est l'unique solution appartenant à $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^n = a$.
La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est la fonction racine n-ième.

► **Remarques :**
- Nous retiendrons par définition que, pour tous les réels a et b appartenant à $\mathbb{R}_+$, nous disposons de l'équivalence
$$b^n = a \iff b = \sqrt[n]{a}.$$
- Si $n \geqslant 2$ est un entier impair, la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ peut être définie sur $\mathbb{R}$, car dans ce cas, la fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

► **Propriété :** Soit un entier $n \geqslant 2$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

► **Propriété (action de la fonction racine n-ième sur la multiplication) :** Soit un entier $n \geqslant 2$.
Pour tous les réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, nous avons

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}.$$