



Chapitre 11 Dérivation : compléments

■ Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété (Dérivée d'une fonction composée) : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telles que :

$$\forall x \in I, \quad u(x) \in J,$$

alors

- La fonction $g \circ u$ définie sur I est dérivable sur I .
- $\forall x \in I, \quad (g \circ u)'(x) = u'(x) \times (g' \circ u)(x).$

► **Remarque :** Nous en déduisons

- En termes fonctionnels : $(g \circ u)' = ((g' \circ u) \times u')$.

• En termes différentiels : $\frac{d(g \circ u)}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx}.$

► **Exemples :** e^{-x^2} , $\sqrt{\sin x}$, $x^3 e^{\frac{1}{x}}$.

► **Propriété (généralisation de la dérivée de u^p) :** Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et p un entier relatif non nul ou un nombre rationnel du type

$$p = \frac{1}{n}, \quad \text{avec } n \geq 2.$$

Alors :

$$(u^p)' = pu' u^{p-1}.$$

► **Remarque :** Nous montrerons plus tard que cette formule de dérivation d'une composée s'étend aux exposants réels non nuls.

■ Dérivée seconde – Dérivée n -ième

► **Définition (dérivée seconde) :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. Si f' est elle-même dérivable sur I , la dérivée de f' , notée f'' est la *dérivée seconde* de la fonction f .

► **Remarque :** En notation de Leibniz, nous avons $f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}.$

► **Remarque :** Le signe de la dérivée seconde est utile, pour déterminer, si besoin est, le sens de variations de la dérivée f' . Ce dernier régle les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ et induit la notion de convexité.

► **Définition (dérivée n -ième) :** Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}$. La *dérivée n -ième*, sous réserve d'existence, notée $f^{(n)}$, est définie en posant $f^{(0)} = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

► **Notation (rappel)** L'ensemble des fonctions dérivables $n \in \mathbb{N}^*$ fois sur un intervalle I est noté $\mathcal{D}^n(I)$.

► **Exemple (dérivée n -ième de la fonction inverse) :** Si f est la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

► **Remarque :** Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I , par une récurrence immédiate, nous

pouvons justifier

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

et, pour tout λ réel,

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Par contre, c'est plus compliqué en ce qui concerne la dérivée n -ième d'un produit comme le montre la propriété suivante.

Propriété (Formule de Leibniz) : Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I .

Le produit fg est n fois dérivable sur I et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

► **Exemple :** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto x^2 e^{-x}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule de Leibniz, nous obtenons, pour tout réel x ,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} (x^2 - 2nx + n(n-1)).$$

est située en dessous du segment $[AB]$ (appelé *corde*).

Dans le cas contraire, la fonction est *concave*.

► **Exemples :** Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

■ Fonction convexe

► **Définition (convexité) :** Une fonction f est *convexe* sur I si et seulement si, pour tous les réels $a, b \in I$ distincts, la partie de cette courbe comprise entre les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0, +\infty[$ et concave sur $] -\infty, 0[$.

Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

- **Propriété (Caractérisation de la convexité)** Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si et seulement si, pour tous les réels a et b appartenant à I tels que $a < b$,

$$f(ka + (1-k)b) \leq kf(a) + (1-k)f(b),$$

avec k décrivant $[0,1]$.

- **Remarque :** La fonction f est concave si, et seulement si :

$$f(ka + (1-k)b) \geq kf(a) + (1-k)f(b), \quad \text{avec } k \in [0,1].$$

- **Exemple (inégalité triangulaire) :** La convexité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ établit une preuve immédiate de l'inégalité triangulaire.

En effet, pour tous les réels a et b ,

$$\left| \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{|a|+|b|}{2},$$

ce qui implique $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Lemme : Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Nous avons

$$\forall t \in [0,1], \quad ta + (1-t)b \in [a,b].$$

Propriété (Deuxième caractérisation de la convexité) :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in I$ et $b \in I$ deux réels tels que $a < b$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe.

$$(ii) \forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq f(a) + (x-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- **Propriété (Dérivée croissante) :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si la dérivée f' est croissante sur I alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a).$$

- **Exemple :** Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $p_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $p : x \mapsto nx^{n-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

■ Rolle et accroissements finis

- **Définition (extremum global) :** Soient f une fonction définie sur un intervalle I , m et M deux réels.

On dit que :

- La fonction f admet sur I le réel m pour minimum si et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) \geq m \quad \text{et} \quad \exists a \in I, f(a) = m.$$

- La fonction f admet sur I le réel M pour maximum si et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M \quad \text{et} \quad \exists a \in I, f(a) = M.$$

- **Définition (extremum local) :** Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que $f(a)$ est un *maximum local* (respectivement un *minimum local*) de f sur I s'il existe un intervalle $J \subset I$ ouvert centré en $a \in J$ tel que $f(a)$ soit un maximum (respectivement un minimum) de f sur J .

Cette fonction puissance est donc convexe sur $[0, +\infty[$. Pour tous les réels x et a positifs, il vient

$$x^n \geq a^n + (x-a)na^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$x^n \geq na^{n-1}x - (n-1)a^n.$$

En particulier, pour $a = 1$ et $x = 1+t$, avec $t \geq 0$, nous retrouvons l'inégalité de Bernoulli

$$\forall t \geq 0, \quad (1+t)^n \geq 1+nt.$$

Propriété (Dérivée croissante et convexité) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si la dérivée f' est croissante sur I , alors f est convexe.

- **Remarques :**

- On peut démontrer que la réciproque de cette proposition est vraie (et c'est bien plus simple).
- Si f est dérivable et f' décroissante sur I , alors f est concave.

- **Propriété (Action de la dérivée seconde)** Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{D}^2(I)$.

- $\forall x \in I, f''(x) \geq 0 \implies f$ est convexe.
- $\forall x \in I, f''(x) \leq 0 \implies f$ est concave.

- **Exemple :**

- La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est convexe sur les intervalles $\left] -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ et $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$.
- La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est concave sur l'intervalle $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

- **Définition (point d'inflexion) :** Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

Si f'' s'annule en $a \in I$ en changeant de signe, le point $A(a, f(a))$ est un *point d'inflexion*.

- **Exemple :** En reprenant l'exemple précédent, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- **Remarque :** Un extremum global est local.

Propriété (Condition nécessaire d'existence d'extremum local) :

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et $a \in I$.

Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Théorème de Rolle : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et qui satisfait à $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0.$$

- **Remarques :**

- Ce théorème affirme que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au moins une tangente parallèle à la droite des abscisses.
- Il assure l'existence implicite d'au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ de l'équation $f'(x) = 0$.

- Les conditions pour appliquer le théorème de Rolle sont indispensables.

Théorème des accroissements finis : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- **Propriété :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
 - Si f est croissante sur I , alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
 - Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
 - Si f est constante sur I , alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Propriété (Principe de Lagrange) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si, pour tout réel $x \in I$, on a

- $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

- **Corollaire (Égalité de deux dérivées)** Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Si, pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) = g'(x)$, alors il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) = g(x) + c.$$

- **Exemple :** Un mobile est soumis à un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v constante égale à v_0 en m.s^{-1} .

Ainsi, pour tout réel $t \geq 0$, nous avons

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} = v_0.$$

La loi horaire de ce mobile est donc

$$x(t) = v_0 t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En considérant la condition initiale $x(0) = x_0$, nous obtenons $c = x_0$, soit

$$x(t) = v_0 t + x_0.$$

Monotonie stricte : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

On suppose que l'ensemble

$$N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

n'est pas une réunion d'intervalles non vides.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante strictement sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante strictement sur I .

- **Remarque :** Lorsque $N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ n'est pas une réunion d'intervalles non vides, on dit que les éléments de N sont des points « isolés ».

- **Corollaire :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est croissante strictement sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est décroissante strictement sur I .

■ Applications (vues en TD)

- **Propriété (Méthode de la sécante) :** Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On considère une fonction f continue, croissante strictement et convexe sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.

Nous considérons la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 = a$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n).$$

Alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

- **Propriété (Méthode de Newton) :** Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I .

Soient a et $b \in I$ tels que $a < b$. Nous supposons :

- $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$,
- $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

Pour tout entier naturel n , nous désignons par :

- $\mathcal{T}_n$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_n d'abscisse x_n ,
- x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec la droite des abscisses.

Ainsi, le réel $x_0 = b$ étant donné, la suite (x_n) est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Nous avons alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

- **Remarque :** Ces deux méthodes permettent de construire des algorithmes à convergence rapide pour déterminer des valeurs approchées de solutions d'équations du type $f(x) = 0$.

- **Théorème (Inégalités des accroissements finis) :** Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$. Nous supposons qu'il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a, b[, \quad m \leq f'(x) \leq M.$$

Alors

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M. \quad (1)$$

Soit maintenant f une fonction dérivable sur un intervalle I et satisfaisant à

$$\exists k > 0, \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k,$$

alors, quels que soient les réels a et b appartenant à I ,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|. \quad (2)$$

- **Propriété (Méthode du point fixe) :** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.

Nous supposons

- $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \in [a, b]$.
- $\exists k \in]0, 1[, \forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq k$.

Alors la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 \in [a, b]$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers l'unique solution α sur $[a, b]$ de l'équation $f(x) = x$.

Chapitre 12 Fonction logarithme

■ Définition – Premières propriétés

Propriété : La fonction $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

- **Définition (Logarithme népérien) :** La fonction logarithme népérien (ou logarithme de base e) est la fonction notée $\ln$ telle que

$$\ln = \exp^{-1}.$$

- **Propriété :** Nous disposons des propriétés suivantes :

- La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.

- **Exemple :** Étude de $f : x \mapsto \ln(2x - 1)$.

■ Dérivée et variations de $\ln$

Propriété (Dérivée de $x \mapsto \ln x$) : La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

- **Remarque :**

- Au point d'abscisse 1, une équation de la tangente est

$$y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1),$$

c'est-à-dire $y = x - 1$.

- Au point d'abscisse e , une équation de la tangente est

$$y = \ln'(e)(x - e) + \ln(e),$$

c'est-à-dire $y = \frac{x - e}{e} + 1$, soit $y = \frac{x}{e}$.

- **Propriété (Variations de $\ln$) :** La fonction $\ln$ est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Propriété (Signe de $\ln x$) :** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\ln x < 0 \iff x \in]0, 1[$
- $\ln x \geq 0 \iff x \in [1, +\infty[$.

- **Exemple :** Résolution de l'inéquation $\ln(x^2 - 1) < 0$.

- **Propriété (Comparaison de deux logarithmes) :** Soient deux réels a et b strictement positifs.

- $a = b \iff \ln a = \ln b$.
- $a < b \iff \ln a < \ln b$.

- **Exemples :** Résolution de l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln 2$, de l'inéquation $\ln(x^2 - 1) > \ln 2$.

- **Propriété (Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$) :** Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que

$$\forall x \in I, \quad u(x) > 0.$$

La fonction $g : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et,

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

- **Exemples :** Dérivée de $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$, de $x \mapsto \ln(e^x - 2)$.

■ Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

- **Propriété (Action de $\ln$ sur la multiplication) :** Quels que soient les réels a et b strictement positifs, nous avons

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

- **Remarque :** Si $a < 0$ et $b < 0$, alors $ab > 0$.

Par conséquent $\ln(ab)$ est défini mais nous ne pouvons pas appliquer l'égalité fonctionnelle ci-dessus.

- **Exemple :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^x + 1}\right) = x - \ln(1 + e^{-x})$.

Propriété (Action de $\ln$ sur une puissance) : Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier relatif n , nous avons

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

- **Propriété (Action de $\ln$ sur la racine n -ième) :** Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel $n \geq 2$, nous avons

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$$

- **Exemples :** Égalités de fonctions avec la même expression.

■ Représentation graphique de la fonction $\ln$

- **Propriété (Limites en $+\infty$, en 0) :** Nous disposons des deux résultats suivants :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

- **Remarque :** Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, nous en déduisons que la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ admet la droite des abscisses pour asymptote verticale.

- **Exemple :** Calcul des limites de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ aux bornes de son ensemble de définition.

- **Propriété :** Dans un repère orthonormal du plan, les courbes $\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{\exp}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

- **Remarque :** On peut démontrer facilement que cette propriété est générale.

Les représentations graphiques d'une bijection et de sa

fonction réciproque sont symétriques relativement à la

première bissectrice du repère orthonormal considéré.

■ Formes indéterminées logarithmiques

- **Propriété (Limite de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$) :** Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

► **Remarques :**

- ▷ Graphiquement, cette limite signifie que, x étant un réel suffisamment grand, les points d'abscisses x sur la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ se rapprochent d'une droite parallèle à la droite des abscisses.

On dit dans ce cas que la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite des abscisses.

- ▷ Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, ce qui signifie que la fonction $x \mapsto \ln x$ a une croissance plus lente que la fonction $x \mapsto x$ et par conséquent est « dominée » par $\frac{1}{x}$, en $+\infty$.

- ▷ Nous retiendrons que par inverse, nous disposons également de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

- ▷ Sans indétermination, nous avons par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

- **Propriété (Croissance comparée de la fonction $x \mapsto \ln x$ avec $x \mapsto x^n$) :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty.$$

► **Remarques :**

- ▷ De la même façon, en posant $X = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, avec $n \geq 2$ entier, nous justifions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

En particulier pour $n = 2$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

- ▷ En termes de croissance comparée, la fonction $\ln x$ a une croissance plus lente sur $]0, +\infty[$ que les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$.

- **Exemple :** Calcul des limites en 0^+ et $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} - \ln(2x)$.

- **Propriété (Limite de $x \mapsto x \ln x$ en 0 à droite) :** Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

► **Remarque :**

- ▷ Sans indétermination, par produit, nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$.

- ▷ Nous retenons ce résultat en exprimant que par croissance comparée, $x \mapsto \ln x$ est « dominée » par $x \mapsto x$ en 0^+ .

- **Propriété (Limite de $x \mapsto x^n \ln x$ en 0^+) :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0.$$

► **Remarques :**

- ▷ De la même façon, en posant $X = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, avec $n \geq 2$ entier, nous justifions dans le premier exemple qui suit.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} \ln x = 0$$

En particulier pour $n = 2$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0.$$

- ▷ En termes de croissance comparée, la fonction $x \mapsto \ln x$ est « dominée » par les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ en 0^+ .

- **Exemples :** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

- **Propriété (Limite de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0) :** Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- **Remarque :** En posant, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\varepsilon(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$$

nous en déduisons

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui restitue la fonction $x \mapsto x$ qui est l'approximation affine tangente en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. On dit aussi que $x \mapsto x$ est le développement limité d'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

- **Exemples :** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

■ Fonction logarithme décimal

- **Définition (Logarithme décimal) :** La fonction *logarithme décimal*, notée $\log$ ou $\log_{10}$, est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

- **Propriété :** La fonction $\log$ satisfait aux égalités suivantes :

- $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \log 10^n = n$.
- $\forall a > 0, \forall b > 0, \log(ab) = \log a + \log b$.
- La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

► **Remarques :**

- ▷ Toutes les propriétés algébriques de $\ln$ restent à disposition pour la fonction $\log$.

▷ La fonction $\log$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}.$$

▷ La fonction $\log$ est utilisée dans de nombreux domaines scientifiques. Par exemple, citons

- L'échelle de Richter qui mesure la magnitude R d'un séisme d'intensité I par la formule

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

où I_0 est une intensité minimale de référence.

- Le niveau sonore d'un son de pression acoustique P est donné, en décibels (dB), par la relation

$$L = 20 \log \frac{P}{P_0},$$

où $P_0 = 20 \mu\text{Pa}$ est la pression minimale en Micropascals, perceptible par l'oreille humaine.

- Le pH d'une solution aqueuse est donné par la formule :

$$pH = -\log [\text{H}_3\text{O}^+],$$

où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ désigne la concentration d'ions H_3O^+ (en mol.L^{-1}).

- ▷ Plus généralement, une fonction logarithme de base a , avec $a > 0$ et $a \neq 1$, notée $\log_a$ est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Dans le cas particulier $a = 2$, la fonction $\log_2$ est employée pour définir l'entropie de Shannon qui est une fonction mathématique qui mesure la quantité d'informations contenues ou délivrées par une source d'information.

■ Fonctions exponentielles de bases a

- **Définition :** Soit un réel $a > 0$ tel que $a \neq 1$. La fonction exponentielle de base a , notée $\exp_a$, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a(x) = e^{x \ln a}.$$

► **Remarques :**

▷ $\exp_e = \exp : x \mapsto e^x$.

▷ Si $a = 1$, alors $\exp_1 : x \mapsto 1$.

Ainsi $\exp_1$ n'est pas une bijection. C'est pour cette raison que nous supposons $a \neq 1$.

▷ Nous observons les égalités suivantes

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exp_a(n) = e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exp_a\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n} \ln a} = e^{\ln(a^{\frac{1}{n}})} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Nous allons, dans la proposition qui suit, étendre ces égalités lorsque $x \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire si x est un nombre rationnel, puis lorsque $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Propriété : Soit un réel $a > 0$ tel que $a \neq 1$.

Pour tout réel x , nous disposons de l'égalité

$$\exp_a(x) = e^{x \ln a} = a^x.$$

- **Propriété (Quelques propriétés de la fonction $x \mapsto a^x$) :**

Soit un réel $a > 0$ tel que $a \neq 1$.

Nous disposons des propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, a^x > 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(a^x) = x \ln a$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, a^{\log_a(x)} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = a^x \iff x = \log_a(y)$.

- **Remarque :** Les trois dernières propriétés ci-dessus justifient que les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont réciproques l'une de l'autre.

- **Exemple :** Résolution de l'équation $n^{2^x} = 2^{n^x}$.

- **Exemple :** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

- **Propriété :** Les propriétés algébriques de la fonction $\exp : x \mapsto e^x$ s'étendent aux fonctions $\exp_a : x \mapsto a^x$, avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, ce qui donne :

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$, et, pour tous les réels x et y ,
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$.

- **Remarque :** Nous avons généralisé aux exposants réels les règles de calcul sur les puissances d'exposants entiers que vous connaissez depuis la classe de Troisième.

- Pour les parties désignées par un symbole



Propriété : une démonstration est exigible.

- Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).
- Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement!).