T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

2025–2026

Lycée Saint-Augustin

# TD 10 **Continuité**

**Exercice 1 (★☆☆☆)** Q.C.M.

*Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.*

**1.** Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère la fonction $p_n$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0, +\infty[$ par $p_n(x) = x^n$.

- **a)** L'équation $p_3(x) = 2$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.
- **b)** L'équation $p_n(x) = m$ (d'inconnue $x$) admet une unique solution dans $[0, +\infty[$ quelle que soit la valeur du paramètre $m$.
- **c)** Pour tout réel $x$ positif ou nul, on a :

$$p_{2n}(x) = 2p_n(x).$$

- **d)** La fonction

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} p_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ -p_n(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue en 0.

**2.** Soient $a$ et $b$ deux paramètres réels. On considère alors la fonction $f_{a,b}$ définie pour tout réel $x$ par :

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 + a & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x \in [0; 2] \\ x^2 + 2x + b & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **a)** $f_{0,1}$ est continue en 0.
- **b)** Pour toute valeur du paramètre $b$, $f_{0,b}$ est continue en 2.
- **c)** $f_{0,0}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- **d)** La droite $\mathscr{D} : x = 1$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f_{0,0}$.

---

**Exercice 2 (★☆☆☆)** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1.** Tracer la fonction $f$ sur $x,y \in [-5; 5]$.
Que peut-on conjecturer quant à la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$ ?

**2.** Démontrer cette conjecture en distinguant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.

---

**Exercice 3 (★☆☆☆)** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $f$ est-elle continue en 0 ?

**Exercice 4 (★★☆☆)** Soient $k \in \mathbb{Z}$ et la fonction $f$ définie sur $]-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-3} & \text{si } x < k \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geqslant k \end{cases}$$

**1.** Tracer les fonction $x \longmapsto \sqrt{x+2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x-4}{x-3}$ sur $x,y \in [-5;5]$.
Conjecturer la valeur de $k \in \mathbb{Z}$ pour laquelle $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**2.** Démontrer cette conjecture.

---

**Exercice 5 (★★☆☆) Valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que l'équation $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

---

**Exercice 6 (★★☆☆) Continuité en 0**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**1.** Cette fonction est-elle continue en 0 ? Contrôler graphiquement.

**2.** Traiter la même question avec la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

---

**Exercice 7 (★★☆☆) Comparaison de deux fonctions continues en un point**

**1.** Soient a et b deux réels. Justifier les égalités suivantes :

$(i)$ $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

$(ii)$ $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$

**2.** En déduire que, si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur un intervalle $I$, continues en $x_0 \in I$, alors les fonctions

$$\varphi : x \longmapsto \min\big(f(x),g(x)\big)$$
$$\psi : x \longmapsto \max\big(f(x),g(x)\big)$$

sont continues en $x_0$.

---

**Exercice 8 (★★☆☆) Non conservation de la continuité en un point**

Pour tout entier naturel $n$, nous considérons la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}.$$

**1.** Selon les valeurs du réel $x$, déterminer la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

2. Cette fonction est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}_+$ ?

---

**Exercice 9 (★★☆☆)** Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) \in [0,1] \text{ et } f(0) = 0. \tag{1}$$

$$\forall\, (x,x') \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(x')| \geqslant |x - x'| \tag{2}$$

La suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, est-elle convergente ?

---

**Exercice 10 (★★★☆)** **Complément sur la fonction exponentielle**

Nous proposons dans cet exercice d'établir la preuve de l'égalité :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

Nous rappelons la proposition **1** et les égalités sur l'exponentielle prouvées en Première :

**Proposition 1**

Soit un entier $n \geqslant 2$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{ou} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

**Proposition 2**

Nous disposons des égalités suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \qquad \exp(n) = e^n \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

1. Calcul de $\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que si $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs tels que $a^n = b^n$, alors $a = b$.
   b) En déduire :
   $$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}.$$
2. Calcul de $\exp(r)$, pour $r \in \mathbb{Q}$.
   a) Nous supposons que $r \in \mathbb{Q}_+$.
   En posant $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, cette fraction étant irréductible, prouver que :
   $$\exp\left(\frac{a}{b}\right) = e^{\frac{a}{b}}.$$
3. Calcul de $\exp(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
   Pour traiter cette partie, nous utilisons la proposition suivante :

   **Proposition 3 – Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$**

   Pour tout réel $x$, il existe une suite $(r_n)$ de nombres rationnels qui converge vers $x$.

   Avec les données de la proposition **3**, en considérant la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par
   $$v_n = \exp(r_n),$$
   prouver que
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

**Exercice 11 (★★★☆) Sinus hyperbolique**

Soit sinh la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**1.** Déterminer les limites de sinh en $+\infty$ et $-\infty$.

**2.** Dresser le tableau de variations de sinh sur $\mathbb{R}$.

**3.** Démontrer que, pour tout $k$, l'équation $\sinh(x) = k$ admet une unique solution réelle que l'on notera $\alpha_k$.

**4.** Déterminer un encadrement de $\alpha_1$ à $10^{-2}$ près.

**5.** Déterminer un encadrement de $\alpha_{10}$ à $10^{-2}$ près.

**Exercice 12 (★★★☆) Une limite**

Soient un entier $n \geqslant 2$ et un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Quelle est la limite quand $x$ tend vers $a$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$ par $x \longmapsto \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$ ?

**Remarque** *Ce calcul de limite prouve que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel $x > 0$, la dérivée de cette fonction est*

$$g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

**Exercice 13 (★★★☆) Une application du théorème des valeurs intermédiaires**

**1.** Soit $f$ une fonction continue sur $[0{,}1]$, et soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ $n$ réels quelconques de $[0{,}1]$.
Montrer qu'il existe $c \in [0{,}1]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

**2.** Une voiture parcourt 150 km en 3 h. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel elle parcourt exactement 50 km.
*On pourra introduire $f(t)$ = distance parcourue jusqu'à l'instant $t$ et s'intéresser à $g(t) = f(t+1) - f(t)$*

**Exercice 14 (★★★★) Étude de la suite $(\sqrt[n]{a})$**

Pour tout réel $a > 0$, nous considérons la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \sqrt[n]{a}.$$

**1.** Conjecturer graphiquement le comportement de la suite $(u_n)$ en $+\infty$.
Que peut-on dire de cette suite lorsque $a = 1$ ?

**2.** Nous supposons que $a > 1$. Le réel $\varepsilon > 0$ étant donné, déterminer un rang entier $p \geqslant 2$ à partir duquel $u_n$ est proche de 1 à $\varepsilon$ près.
Quelle est la limite de $(u_n)$ dans ce cas ?

**3.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $0 < a < 1$. Conclure.