T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

2025–2026

Lycée Saint-Augustin

TD 11 **Dérivation : compléments**

Exercice 1 (★☆☆☆) Q.C.M.

Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f est égal à $[-1{,}1]$.

b) f est dérivable en 1.

c) L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est $y = \sqrt{3}x - 1$.

d) La courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé donné est un demi-cercle.

2. On considère la fonction polynôme du troisième degré $P : x \longmapsto x^3 - 3x + 2$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a) $f(1) = f'(1) = 0$.

b) f est croissante sur l'intervalle $[-2{,}0]$.

c) $f(1)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

d) Le point $A(0{,}2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

Exercice 2 (★☆☆☆) Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

1. $a : x \longmapsto x^3 \cos(5x+1)$

2. $b : x \longmapsto e^{\cos x}$

3. $c : x \longmapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$

4. $d : x \longmapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

5. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

6. $g : x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$

7. $h : x \longmapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$

Exercice 3 (★☆☆☆) Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $h = g \circ f$. Si $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$.

Exercice 4 (★☆☆☆) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 5 (★☆☆☆) Dérivée d'une fonction paire, impaire, périodique

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose f paire. Que dire de f' ?

2. Même question si f est impaire.

3. Même question si f est périodique de période T, où $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 (★☆☆☆) Recherche de maximum

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Exercice 7 (★★☆☆) Dérivées d'ordre n

Déterminer les dérivées d'ordre n (où $n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions f et g suivantes :

1. $f : x \longmapsto xe^x$.

2. $g = sin$.

Exercice 8 (★★☆☆) Fonctions à dérivée n-ième nulle

Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée n-ième est identiquement nulle.

Exercice 9 (★★☆☆) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Exercice 10 (★★☆☆) Pendule simple

Soient un pendule simple de masse m et de longueur ℓ, θ l'angle que fait le pendule avec la « verticale descendante » ; alors θ dépend du temps t et obéit à l'équation différentielle :

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0.$$

L'énergie du pendule au temps t est donnée par la formule :

$$E(t) = \frac{m\ell^2\theta'(t)^2}{2} - mg\ell\cos(\theta(t)).$$

Montrer que E est constante (conservation de l'énergie).

Exercice 11 (★★★☆) Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^2e^x$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (x^2 + a_nx + b_n)e^x.$$

2. Expliciter $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et x.

Exercice 12 (★★★☆) Limites et taux d'accroissement

Soit f une fonction dérivable en a appartenant à un intervalle ouvert I.

1. Calculer la limite quand h tend vers 0 des fonctions suivantes :

a) $h \longmapsto \dfrac{(a+h)f(a) - af(a+h)}{h}$.

b) $h \longmapsto \dfrac{(a+nh)f(a) - af(a+h)}{h}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer la limite quand x tend vers a de la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^{-a}f(x) - e^{-x}f(a)}{x-a}.$$

Exercice 13 (★★★☆) Dérivée de la bijection réciproque

Soient I et J deux intervalles ouverts non vides. Soit f une bijection de I sur J où $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est la bijection réciproque de f.

Montrer que si f est dérivable sur I et que si, de plus, f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall\, y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Exercice 14 (★★★★) Méthode de la sécante

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On considère une fonction f continue, croissante strictement et convexe sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.

On désigne par A et B les deux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

1. Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. Déterminer une équation de la droite (AB).

3. En déduire que l'abscisse x_1 du point d'intersection de la sécante (AB) avec la droite des abscisses satisfait à

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a).$$

4. En réitérant ce procédé, nous considérons la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 = a$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}f(x_n).$$

En utilisant la convexité de la fonction f, prouver que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leqslant \alpha.$$

En déduire le sens de variation de la suite (x_n).

5. Justifier que (x_n) converge vers le réel α.

6. Nous supposons que $f : x \longmapsto x^3 - 4x - 2$.

Proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée d'une solution $a \in [2,3]$ de l'équation $f(x) = 0$.

Après avoir localisé graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0$, proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée d'une des autres solutions de cette équation.

Exercice 15 (★★★★) Méthode de Newton

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I.

Soient $a \in$ et $b \in I$ tels que $a < b$. Nous supposons :

— $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$,

— $\forall\, x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]a,b[$.

2. **a)** Soit $\mathcal{T}_0$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au points M_0 d'abscisse $x_0 = b$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de $\mathcal{T}_a$ avec la droite des abscisses.

b) Soit $\mathcal{T}_1$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_1 d'abscisse x_1. Déterminer l'abscisse x_2 du point d'intersection de $\mathcal{T}_1$ avec la droite des abscisses.

3. En réitérant ce processus, pour tout entier naturel n, nous désignons par :

— $\mathcal{T}_n$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_n d'abscisse x_n,

— x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec la droite des abscisses.

Montrer que, le réel $x_0 = b$ étant donné, la suite (x_n) est définie par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. a) Justifier que la suite (x_n) est minorée par α.

b) Quel est le sens de variation de cette suite ?

c) La suite (x_n) converge vers le réel α. Expliquez pourquoi.

5. En utilisant la méthode de Newton, proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée de $\sqrt[q]{c}$, avec $q \geqslant 2$ et $c > 0$ choisis par l'utilisateur. Avec les données de cet exercice, la fonction f étant choisie, nous prendrons comme test d'arrêt la condition

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < \varepsilon.$$

où ε est la précision adoptée en entrée pour obtenir une approximation de $\sqrt[q]{c}$.

Exercice 16 (★★★★) La fonction sinus cardinal

La fonction sinus cardinal, notée ici sinc, est définie par :

$$\begin{cases} \operatorname{sinc}(0) = 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}. \end{cases}$$

1. Étudier la parité de sinc.

2. Montrer que sinc est continue en 0. Quelle est sa limite en $\pm\infty$?

3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\operatorname{sinc}'(x)$. On admettra que sinc est également dérivable en 0, de dérivée nulle. [1]

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction tan admet un unique point fixe sur l'intervalle $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on note x_n.

5. Montrer que les x_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les points en lesquels sinc' s'annule.

6. Selon la parité de n, tracer le tableau de variations de sinc sur l'intervalle $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 17 (★★★★) Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, avec $a < b$.

1. Nous supposons qu'il existe deux réels m et M tels que

$$\forall\, x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Prouver que

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M. \tag{1}$$

2. *Une application.* Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. Nous supposons qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall\, x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k.$$

Montrer que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k(b - a).$$

1. Une preuve au niveau terminale est possible mais fastidieuse.

4. En déduire que si f est dérivable sur un intervalle I et satisfait à

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k,$$

alors, quels que soient les réels a et b appartenant à I,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|. \tag{2}$$

5. *Une application.* Justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| < |x|.$$

Exercice 18 (★★★★) Méthode du point fixe

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$.

Nous supposons

— $\forall x \in [a,b], \quad f(x) \in [a,b]$.

— $\exists k \in]0,1[, \forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [a,b]$.

2. On considère la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 \in [a,b]$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Justifier que, pour tout entier naturel n,

a) $x_n \in [a,b]$.

b) $|x_{n+1} - \alpha| < k|x_n - \alpha|$.

3. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leqslant k^n |x_0 - \alpha|.$$

La suite (x_n) converge-t-elle ?

Exercice 19 (★★★★) Méthode du point fixe. Étude d'un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

1. Justifier que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right], \quad f(x) \in \left[\frac{1}{2},1\right].$$

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $a \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

3. Prouver que, pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$,

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant k,$$

en posant $k = \dfrac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e}+1)^2}$.

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{e^{u_n}}{1 + e^{u_n}}.$$

En appliquant les résultats des questions 2 et 3 de l'exercice précédent, justifier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{k^n}{2}.$$

5. La suite (u_n) converge vers α : pourquoi ?
