



TD 12 Fonction logarithme népérien

Exercice 1 (★☆☆☆) Q.C.M.

Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - 2)$ et on note $\mathcal{D}$ son ensemble de définition.

a) $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{e^2}, +\infty \right[.$

b) $\ln 2$ est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathcal{D}$.

c) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x) = \frac{1}{1 - 2e^{-x}}.$$

d) $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) < x$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \ln(x^2 - 4x + 3)$. On note $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

a) $\mathcal{D} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[.$

b) La droite $\Delta : x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

c) $\forall x \in \mathcal{D}, g(x) = \ln(x - 1) + \ln(x - 3)$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$.

Exercice 2 (★☆☆☆) Résoudre chacune des équations suivantes après avoir précisé leur ensemble de validité.

1. $\ln x = 3$

2. $\ln x = -1$

3. $\ln(2x - 1) = 1$

4. $\ln(x + 3) + \ln(x - 2) = \ln 6$

5. $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$

Exercice 3 (★☆☆☆) Résoudre chacune des inéquations suivantes après avoir précisé leur ensemble de validité.

1. $\ln x > 2$

2. $\ln \frac{1}{x} > 2$

3. $\ln^2 x - 4 > 0$

Exercice 4 (★★☆☆) Limite d'un taux d'accroissement

Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Exercice 5 (★★☆☆)

1. Étudier la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x - \ln x$.

b) $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 1}$.

2. Étudier la limite en 0 de la fonction $h : x \mapsto x \ln(2x)$.

Exercice 6 (★★☆☆) Étude d'une fonction du type $\ln(u)$

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Exercice 7 (★★☆☆) Logarithme décimal

La fonction logarithme décimal notée $\log$ (ou encore $\log_{10}$) est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

1. Donner les valeurs de $\log(1), \log(10)$.

2. Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b , on a la propriété algébrique fondamentale :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

3. Déterminer la valeur de $\log(10^n)$ lorsque n est un entier relatif.

Exercice 8 (★★☆☆) Fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels, on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

2. Dresser, en fonction des valeurs du paramètre réel a , le tableau de variation de la fonction $\exp_a$.

Exercice 9 (★★☆☆) Une bijection

1. Quel est l'ensemble de définition D_g de la fonction $g : x \mapsto \ln(1 - \ln x)$?

2. Montrer que g est une bijection de D_g sur un intervalle I que l'on précisera.

3. Soit un réel $b \in I$. Résoudre dans D_g l'équation $g(x) = b$.

En déduire la fonction réciproque de g , c'est-à-dire la fonction notée g^{-1} qui associe à chaque réel $b \in I$ l'unique solution x de l'équation $g(x) = b$.

4. Définir les fonctions $g \circ g^{-1}$ et $g^{-1} \circ g$.

5. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto g(|x|)$? Cette fonction est-elle une bijection ?

Exercice 10 (★★☆☆) obligatoire Encadrement de $x \mapsto \ln(1+x)$ par des polynômes

Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, prouver successivement les deux encadrements

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1)$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (2)$$

Exercice 11 (★★☆☆) Dérivabilité en 0

Étudier la dérivabilité en 0, à droite, de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 12 (★★☆☆) Limite d'un produit

Nous considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Nous posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

1. En utilisant l'encadrement (1) établi lors de l'exercice 10 de ce paragraphe, montrer que la suite (v_n) converge.
 2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
-

Exercice 13 (★★★★☆) Une exponentielle généralisée

Nous considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^x = e^{x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que cette fonction est continue à droite en $x = 0$.
2. Est-elle dérivable en $x = 0$?
3. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que f est convexe.
5. En déduire que, pour tous les réels a et b strictement positifs,

$$4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^{a+b} \leq (a^a + b^b)^2$$

Exercice 14 (★★★★☆) Dérivée n -ième

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Calculer la dérivée première et seconde de la fonction f .
2. Nous considérons deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = -(n+1)v_n. \end{cases}$$

3. Montrer que, quel que soit le réel $x > 0$ et quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}.$$

4. Déterminer v_n en fonction de l'entier $n \geq 1$.

5. Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^{n+1} \times n! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Exercice 15 (★★★★) Fonction puissance d'exposant réel

Soient a un réel et p_a la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad p_a(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel a et tout réel $x > 0$,

a) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

b) $\ln(x^a) = a \ln x$.

2. Étudier, selon le signe de a , les limites de p_a en 0, en $+\infty$.

3. Quel est le sens de variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction p_a ?

4. Selon le signe de a , déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions

a) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^a}$

b) $x \mapsto \frac{e^x}{x^a}$

Quelle est la limite en 0, à droite, de $x \mapsto x^a \ln x$?

5. Justifier que si $a \in]1, +\infty[$, alors p_a est convexe.

6. En déduire, pour tout réel $x > 0$,

$$x^a - 1 \geq a(x - 1).$$
