



TD 13 Fonctions trigonométriques

Fonctions périodiques

Exercice 1 (★☆☆☆) Sinus « redressé »

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

1. Étudier la parité de la fonction f .
 2. Justifier que f est 1-périodique.
 3. Représenter graphiquement la fonction f .
-

Exercice 2 (★★☆☆) Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{\cos(2x) + 2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?
 2. Étudier la parité de la fonction f . En déduire que sa courbe représentative C_f admet un élément de symétrie.
 3. Montrer que f est π -périodique.
 4. Expliquez comment représenter graphiquement la fonction f ?
 5. Justifier que, pour tout réel x , $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$.
 6. Déterminer les coordonnées des points communs à la courbe C_f et à la droite d'équation $y = 2$.
Même question avec la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$.
 7. Soit a un réel tel que $a \geq 2$. Déterminer une période de la fonction $g : x \mapsto \frac{a}{\cos(ax) + a}$.
-

Calculs trigonométriques

Exercice 3 (★★☆☆) Formules d'addition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin nx}{\sin px} - \frac{\cos nx}{\cos px}$?
 2. Pour $x \in D_g$, déterminer l'expression la plus simplifiée du réel $g(x)$.
 3. Calculer $g(x)$ lorsque $n = 3p$.
-

Exercice 4 (★★☆☆) Formules d'addition et fonction tan

1. Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\tan a \times \tan b \neq 1$. Montrer que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

En déduire, sous réserve que l'égalité qui suit soit définie, que

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2. Une application : calcul de $\tan \frac{\pi}{12}$:

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$?

b) Justifier que

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall x \in D_g, \quad g(x) = \tan(\alpha + x).$$

c) En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{5\pi}{12}$, puis celle de $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 5 (★★★★☆) Une formule de transformation de produit en somme

1. Soient a et b deux réels quelconques. Établir l'égalité :

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

2. En déduire que $2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}$. Quelle est la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$?

Exercice 6 (★★★★☆) Transformations de sommes en produits

1. Pour tous réels a et b , nous posons $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$.

En utilisant les formules qui transforment un produit en une somme établies dans l'exercice précédent, prouver les formules qui transforment une somme en un produit, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{aligned}$$

2. *Application 1.* Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

b) $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$.

3. *Application 2.* Soient p et q deux réels tels que $\sin p + \sin q \neq 0$. Prouver que

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan \frac{p-q}{2}$$

En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{24}$.

Exercice 7 (★★★★☆) Une équation du 4^e degré

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 4x = \cos 3x$. Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à $] -\pi, \pi]$.
2. Justifier que, pour tout réel x ,
 - a) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$,
 - b) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0$$

Exercice 8 (★★★★☆) Principe de superposition

Soient un réel $\omega > 0$, a et b deux réels non nuls.

1. Justifier les deux encadrements suivants :

$$-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1.$$

2. Nous considérons deux fonctions trigonométriques de même pulsation ω , définies pour tout réel t , par : $f : t \mapsto \cos \omega t$ et $g : t \mapsto \sin \omega t$.

Nous superposons ces deux fonctions, c'est-à-dire nous en formons une combinaison linéaire, en définissant sur $\mathbb{R}$, la fonction $h : t \mapsto af(t) + bg(t)$.

Montrer que

$$\exists \phi \in]-\pi, \pi], \forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \phi).$$

3. *Application.* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = -2$.
-

Exercice 9 (★★☆☆) Expression rationnelle de $\cos x$ et $\sin x$

1. En utilisant les formules de passage à l'angle « moitié », montrer que pour tout réel $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, nous disposons des deux égalités :

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad ; \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

2. En posant $t = \tan \frac{x}{2}$, avec $x \not\equiv \pi [2\pi]$, exprimer rationnellement $\sin x$ et $\cos x$ en fonction du réel t .
-

Exercice 10 (★★★★) Calcul d'une somme de fonctions trigonométriques

Soient un réel $x \not\equiv 0 [2\pi]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous considérons la fonction (s_n) définie par :

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx.$$

1. En utilisant une des formules qui transforme un produit en une somme vue dans l'exercice 5, montrer que

$$2s_n(x) \sin \frac{x}{2} = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}.$$

En utilisant une des formules qui transforme une somme en un produit vue dans l'exercice 6, en déduire

$$s_n(x) = \frac{\sin \left(n \frac{x}{2} \right) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

2. Pour tout réel $x \neq 0$ $[2\pi]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire le calcul de la somme

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos^2 kx.$$

Exercice 11 (★★★★☆) Une inégalité

Soit x un réel quelconque.

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

Calculs de limites

Exercice 12 (★☆☆☆☆) sin d'un angle en degré

Soient $h \in [0, 180]$ et $x = \frac{\pi}{180}h$ les mesures respectivement en degrés et en radians d'un même angle.

Nous définissons la fonction $\sin^\circ$, en posant : $\sin^\circ h = \sin x = \sin \frac{\pi}{180}h$.

Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^\circ h}{h}$.

Exercice 13 (★★☆☆☆) Une limite remarquable en 0

1. Pour tout réel x , justifier que $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ admet pour limite $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

2. En déduire les limites en a des fonctions suivantes :

- a) $g : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}$, en $a = 0$,
 b) $h : x \mapsto \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$, en $a = 0$,
 c) $k : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{\cos 2x}$, en $a = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 14 (★☆☆☆☆) Limites et fonction tan

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$.
 2. Déterminer la limite en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Applications de la dérivation de sin et cos

Exercice 15 (★★★★☆) Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(\pi x)$.

Nous désignons par $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de cette fonction relativement à un repère orthonormal du plan.

1. Quelle est la parité de f ? Sur quel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?
 2. a) Montrer que pour tout réel x , $f(x - 2) = f(x) - 2$.

- b) En déduire qu'il existe une translation T qui laisse globalement invariante la courbe $\mathcal{C}_f$, c'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathcal{C}_f, T(M) \in \mathcal{C}_f.$$

- c) Sur quel intervalle peut-on à nouveau restreindre l'étude de f ? Contrôler graphiquement.

3. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[0,1]$? En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une infinité de tangentes horizontales.
4. Montrer que pour tout réel x , nous disposons de la double inégalité : $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.
5. Étudier l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite (d) d'équation $y = x + 1$. Traiter la même question avec la droite (d') d'équation $y = x - 1$.

Exercice 16 (★★★★) Inégalité de Huygens

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'il existe un polynôme p tel que, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(x) = \frac{p(\cos x)}{\cos^2 x}.$$

2. Déterminer le sens de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En déduire l'inégalité de Huygens :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 2 \sin x + \tan x \geq 3x.$$

Exercice 17 (★★★★) Encadrement de sin et cos par des polynômes

1. En étudiant le sens de variations sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x - \sin x$, justifier, pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité $\sin x \leq x$.
2. De la même façon, pour tout réel $x \geq 0$, prouver les trois inégalités suivantes :

a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x,$

b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x,$

c) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$

3. En déduire un encadrement des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$:

a) sur $[0, +\infty[$,

b) sur $] -\infty, 0]$.

4. *Application 1.* Quelle est la limite en 0 de la fonction $\tau : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$? En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 .

5. *Application 2.* Quelle est la limite en $+\infty$ de la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)} ?$$

Exercice 18 (★★★★☆) Une distance minimum

Dans le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O , nous donnons un point $A(a, b)$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Une droite passant par A coupe la droite des abscisses en un point M d'abscisse positive et la droite des ordonnées en un point N d'ordonnée positive.

Nous désignons par :

- $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, une mesure de l'angle $\widehat{OMA}$,
- $d(x)$ la distance MN .

1. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, justifier que

$$d(x) = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}.$$

2. Justifier que la fonction $d : x \mapsto d(x)$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que l'équation $d'(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tel que : $\tan x_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

3. Montrer que la fonction d atteint un minimum en x_0 . Donner un algorithme qui restitue ce minimum, les valeurs des réels $a > 0$ et $b > 0$ étant choisies par l'utilisateur.
-

Exercice 19 (★★☆☆☆) Un encadrement de $x \mapsto \cos x$

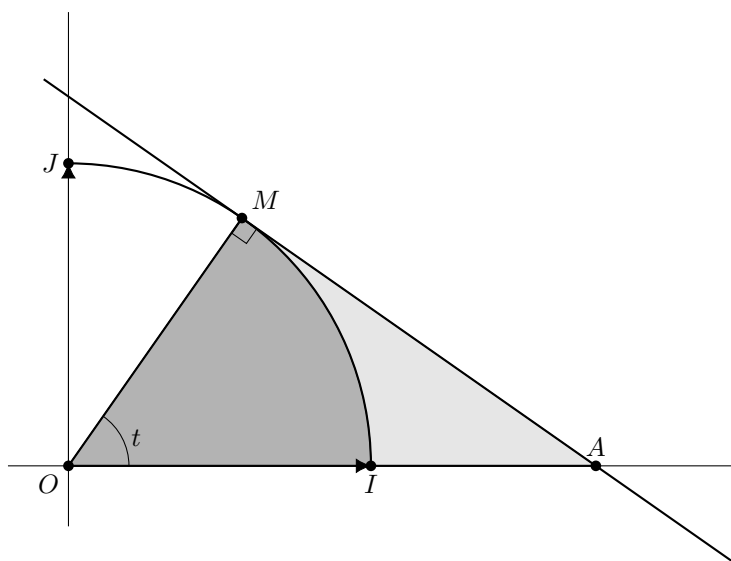
Nous désignons par $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$, lorsque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point B .
2. Déterminer une équation de la droite (AB) .
3. Justifier l'encadrement

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x.$$

Exercice 20 (★★★★☆) Comparaison de deux aires

Soient $\mathcal{C}$ un quart de cercle de rayon 1 et $M \in \mathcal{C}$. Avec les notations de la figure ci-après, l'angle $\widehat{IOM}$ a pour mesure en radian le réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



La tangente en M au quart de cercle $\mathcal{C}$ coupe la droite (OI) en un point A .

Nous proposons de comparer l'aire $f(t)$ du secteur angulaire IOM avec l'aire $g(t)$ de la partie du plan OMA située à l'extérieur du secteur. Pour cela, nous posons, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(t) = f(t) - g(t)$.

1. Prouver que, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$h(t) = t - \frac{\tan t}{2}.$$

2. En étudiant le sens de variations de la fonction h sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, justifier que l'équation $h(t) = 0$ admet une unique solution $t_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
 3. En utilisant l'algorithme de dichotomie ou celui de Newton donner une valeur approchée avec une précision choisie par l'utilisateur. Conclure.
-