



Correction du TD 13 Fonctions trigonométriques

Fonctions périodiques

Exercice 1 (★☆☆☆) Sinus « redressé »

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

1. Étudier la parité de la fonction f .
2. Justifier que f est 1-périodique.
3. Représenter graphiquement la fonction f .

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$f(-t) = |\sin(\pi(-t))| = |-\sin(\pi t)| = |\sin(\pi t)| = f(t).$$

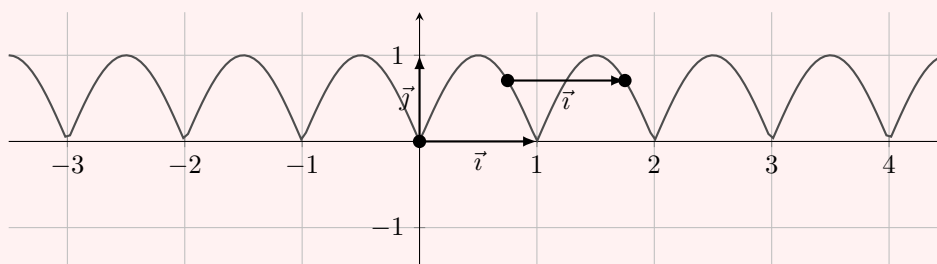
Nous en concluons que la fonction f est paire.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$f(t+1) = |\sin(\pi(t+1))| = |\sin(\pi t + \pi)| = |-\sin(\pi t)| = |\sin(\pi t)| = f(t),$$

ce qui justifie que f est 1-périodique.

3. Pour représenter graphiquement la fonction f , nous nous intéressons d'abord à la restriction de f sur un intervalle de longueur une période, par exemple sur l'intervalle $[0,1]$. Par une translation de vecteur $\vec{i}$, nous obtenons $\mathcal{C}_f$ restreint à $\mathbb{R}_+$. Enfin par symétrie par rapport à la droite des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}_f$ est obtenue, pour tout réel t .



Exercice 2 (★★☆☆) Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{\cos(2x) + 2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?
2. Étudier la parité de la fonction f . En déduire que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet un élément de symétrie.
3. Montrer que f est π -périodique.
4. Expliquez comment représenter graphiquement la fonction f ?
5. Justifier que, pour tout réel x , $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$.

6. Déterminer les coordonnées des points communs à la courbe $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = 2$.
Même question avec la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$.
7. Soit a un réel tel que $a \geq 2$. Déterminer une période de la fonction $g : x \mapsto \frac{a}{\cos(ax) + a}$.

1. La fonction f est définie à condition que $\cos(2x) + 2 \neq 0$.

Pour tout réel x , cette condition est réalisée car l'équation $\cos(2x) = -2$ n'a pas de solution.

Nous en concluons que $D_f = \mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x , la fonction $x \mapsto \cos x$ étant paire, nous avons

$$f(-x) = \frac{2}{\cos(-2x) + 2} = \frac{2}{\cos(2x) + 2} = f(x).$$

La fonction f est paire.

Nous en déduisons que la droite des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Puisque $x \mapsto \cos x$ est 2π périodique, nous obtenons

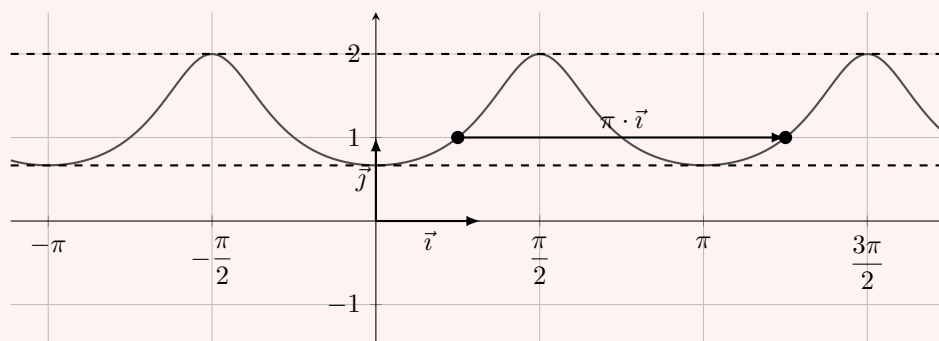
$$f(x + \pi) = \frac{2}{\cos(2(x + \pi)) + 2} = \frac{2}{\cos(2x + 2\pi) + 2} = \frac{2}{\cos(2x) + 2} = f(x)$$

ce qui justifie que f est π -périodique.

4. Pour représenter graphiquement la fonction f , nous nous intéressons d'abord à la restriction de f sur un intervalle de longueur une période, par exemple sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Par une translation de vecteur $\pi \cdot \vec{i}$, nous obtenons $\mathcal{C}_f$ restreint à $\mathbb{R}_+$.

Enfin par symétrie par rapport à la droite des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}_f$ est obtenue pour tout réel x .



5. Soit x un réel quelconque. Nous savons que

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1, \text{ d'où } 1 \leq \cos(2x) + 2 \leq 3.$$

La fonction inverse est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$. Il en résulte

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos(2x) + 2} \leq 1.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2.$$

6. Les abscisses des points communs à la courbe $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = 2$ sont solutions de l'équation $f(x) = 2$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{2}{\cos(2x) + 2} = 2 \\ &\iff 2(\cos(2x) + 2) = 2 \\ &\iff \cos 2x = -1, \end{aligned}$$

soit $\cos 2x = -1 \iff 2x = \pi + k(2\pi) \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Nous en concluons que les points communs à la courbe $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = 2$ ont pour coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 2\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

De la même façon, les abscisses des points communs à la courbe $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = \frac{2}{3}$ sont solutions de l'équation $f(x) = \frac{2}{3}$. Il vient

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2}{3} &\iff \frac{2}{\cos(2x) + 2} = \frac{2}{3} \\ &\iff 3(\cos(2x) + 2) = 6 \\ &\iff \cos 2x = 1, \end{aligned}$$

soit $\cos 2x = 1 \iff 2x = k(2\pi) \iff x = k\pi$.

Nous en concluons que les points communs ont pour coordonnées $\left(k\pi, \frac{2}{3}\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque. Nous observons sur la figure ci-dessus que les droites d'équations $y = 2$ et $y = \frac{2}{3}$ sont tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ en une infinité de points.

7. Par analogie avec la question 3., pour tout réel x , nous avons

$$g\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) = \frac{a}{\cos\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right) + a} = \frac{a}{\cos(ax + 2\pi) + a} = \frac{a}{\cos(ax) + a} = g(x).$$

Nous en concluons que la fonction g est $\frac{2\pi}{a}$ -périodique.

Calculs trigonométriques

Exercice 3 (★★☆☆) Formules d'addition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin nx}{\sin px} - \frac{\cos nx}{\cos px}$?
2. Pour $x \in D_g$, déterminer l'expression la plus simplifiée du réel $g(x)$.
3. Calculer $g(x)$ lorsque $n = 3p$.

1. La fonction g est définie si et seulement si $\sin px \neq 0$ et $\cos px \neq 0$. Or nous avons

$$\sin px = 0 \text{ ou } \cos px = 0 \iff px \equiv 0 \text{ } [\pi] \text{ ou } px \equiv \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$$

$$\sin px = 0 \text{ ou } \cos px = 0 \iff px \equiv 0 \text{ } \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin px = 0 \text{ ou } \cos px = 0 \iff x \equiv 0 \text{ } \left[\frac{\pi}{2p}\right].$$

Nous en concluons $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{k \frac{\pi}{2p} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Pour tout réel $x \in D_g$, nous obtenons

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sin nx \cos px - \cos nx \sin px}{\sin px \cos px} \\ &= \frac{\sin(nx - px)}{\sin px \cos px} \\ &= \frac{\sin(n - p)x}{\frac{1}{2} \sin 2px} \\ &= \frac{2 \sin(n - p)x}{\sin 2px}. \end{aligned}$$

3. Pour tout réel $x \in D_g$, si $n = 3p$, alors nous avons

$$g(x) = 2 \frac{\sin 2px}{\sin 2px} = 2.$$

Exercice 4 (★★☆☆) Formules d'addition et fonction tan

1. Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\tan a \times \tan b \neq 1$.

Montrer que $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2. Une application : calcul de $\tan \frac{\pi}{12}$:

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$?

b) Justifier que

$$\exists \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \forall x \in D_g, \quad g(x) = \tan(\alpha + x).$$

c) En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{5\pi}{12}$, puis celle de $\tan \frac{\pi}{12}$.

1. Soient deux réels a et b satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Nous avons

$$\begin{aligned} \tan(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\cos a \cos b \left(\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b} \right)}{\cos a \cos b \left(1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} \right)} \\ &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\sin b}{\cos b}} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{aligned}$$

De la même manière, sous réserve que l'égalité à prouver soit définie, sachant que la fonction tan est impaire, nous obtenons

$$\tan(a - b) = \tan(a + (-b)) = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)} = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2. a) La fonction g est définie si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\tan x \neq 1$. Or nous avons

$$\tan x = 1 \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous en concluons $D_g = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$.

b) Pour tout réel $x \in D_g$, puisque $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, nous obtenons

$$g(x) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right).$$

Par conséquent le réel $\alpha = \frac{\pi}{4}$ convient.

c) Nous remarquons que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, ce qui donne

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = g \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1 + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

Nous remarquons que $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$. Nous en déduisons

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right)} = \frac{\cos \frac{5\pi}{12}}{\sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{\tan \frac{5\pi}{12}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}.$$

Exercice 5 (★★★☆☆) Une formule de transformation de produit en somme

1. Soient a et b deux réels quelconques. Établir l'égalité : $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.
2. En déduire que $2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}$.

1. Soient a et b deux réels. Nous savons que :

$$\begin{cases} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

Par addition membres à membres, nous obtenons la formule attendue de transformation de produit en somme

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b).$$

Remarque. De la même façon, nous pouvons obtenir :

$$\begin{cases} 2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b) \\ 2 \cos a \sin b = \sin(a + b) - \sin(a - b) \\ 2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b) \end{cases}$$

2. Nous avons

$$2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$$

Or, nous savons que $2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7}$. De plus, il vient

$$2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{7} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{7} - \frac{3\pi}{7} \right) = \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7},$$

$$2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{7} - \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}.$$

Par addition membres à membres, nous en concluons

$$2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}.$$

Nous en déduisons

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}}$$

Nous observons que $\sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7}$, ce qui permet de conclure par :

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

Exercice 6 (★★★☆☆) Transformations de sommes en produits

1. Pour tous réels a et b , nous posons $\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases}$.

En utilisant les formules qui transforment un produit en une somme établies dans l'exercice précédent, prouver les formules qui transforment une somme en un produit, c'est-à-dire :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (1)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (2)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (3)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \quad (4)$$

2. *Application 1.* Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

b) $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$.

3. *Application 2.* Soient p et q deux réels tels que $\sin p + \sin q \neq 0$. Prouver que

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan \frac{p-q}{2}$$

En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{24}$.

1. Nous avons

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Nous reprenons une à une les formules :

- (1) : De l'égalité $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, il résulte que

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

- (2) : De l'égalité $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, il résulte que

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \text{ soit } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

- (3) : De l'égalité $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, il résulte que

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

- (4) : Pour établir la dernière égalité, nous utilisons la parité de la fonction sin.

$$\sin p - \sin q = \sin p + \sin(-q) = 2 \sin \frac{p+(-q)}{2} \cos \frac{p-(-q)}{2} = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

2. Application 1.

a) En remarquant que

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} = 2 \sin 2x \cos x,$$

il vient

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 &\iff \sin 2x(1 + 2 \cos x) = 0 \\ &\iff \sin 2x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2} \right] \text{ ou } x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{aligned}$$

b) Nous remarquons que

$$\cos x + \cos 7x = 2 \cos \frac{x+7x}{2} \cos \frac{x-7x}{2} = 2 \cos 4x \cos(3x),$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 7x = \cos 4x &\iff \cos 4x(1 - 2 \cos 3x) = 0 \\ &\iff \cos 4x = 0 \text{ ou } \cos 3x = \frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{4} \right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{9} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{9} \left[\frac{2\pi}{3} \right]. \end{aligned}$$

3. Application 2.

Soient p et q deux réels tels que $\sin p + \sin q \neq 0$.

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = \frac{-2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = -\frac{\sin \frac{p-q}{2}}{\cos \frac{p-q}{2}} = -\tan \frac{p-q}{2}$$

En particulier, pour $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$, nous obtenons

$$\frac{\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6}} = -\tan \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2} = -\tan \frac{\pi}{24}.$$

Ce qui implique :

$$\tan \frac{\pi}{24} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$$

Exercice 7 (★★★☆☆) Une équation du 4^e degré

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 4x = \cos 3x$. Donner les solutions de cette équation qui appartiennent à $] -\pi, \pi]$.
2. Justifier que, pour tout réel x ,
 - a) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$,
 - b) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0$$

1. Notons (A) l'équation

$$\cos 4x = \cos 3x \tag{A}$$

Il vient

$$\begin{aligned} (A) &\iff 4x \equiv 3x [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv -3x [2\pi], \\ &\iff x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } 7x \equiv 0 [2\pi], \\ &\iff x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } x \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{7} \right]. \end{aligned}$$

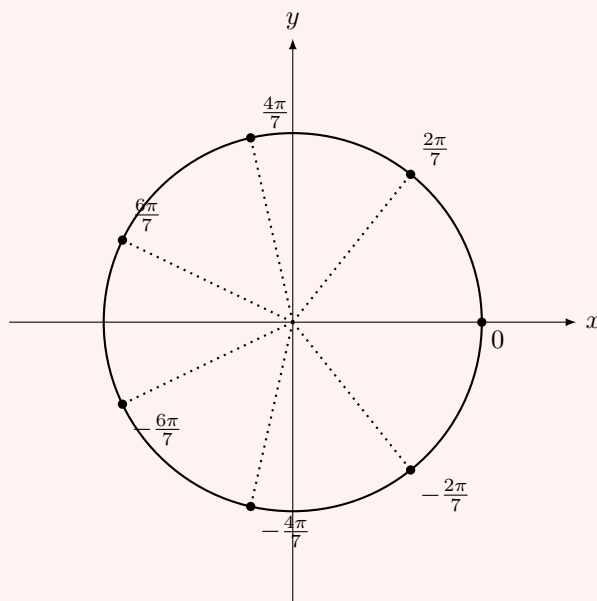
Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_{(A)} = \left\{ k \frac{2\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de (A) sur $] -\pi, \pi]$ est :

$$S_{(A)} \cap] -\pi, \pi] = \left\{ -\frac{6\pi}{7}, -\frac{4\pi}{7}, -\frac{2\pi}{7}, 0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7} \right\}$$

Sur un cercle trigonométrique, nous obtenons :



2. Soit x un réel.

a) L'égalité $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ est justifiée dans le cours.

b) Nous prouvons à présent l'égalité $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

Par passage à l'angle « moitié », il vient

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 2 \cos^2 2x - 1 \\ &= 2 (2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ &= 2 (4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 \\ &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1. \end{aligned}$$

3. Nous désignons par (B) l'équation

$$8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0 \quad (B)$$

En posant $X = \cos x$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 8 \cos^4 x - 4 \cos^3 x - 8 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 &\iff 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ &\iff \cos 4x = \cos 3x \\ &\iff (A) \end{aligned}$$

L'équation (B), polynomiale du 4^e degré, admet au plus quatre solutions.

En utilisant les solutions de (A), nous obtenons

$$S_{(B)} = \left\{ 1, \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7} \right\}.$$

Exercice 8 (★★★★☆) Principe de superposition

Soient un réel $\omega > 0$, a et b deux réels non nuls.

1. Justifier les deux encadrements suivants :

$$-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1.$$

2. Nous considérons deux fonctions trigonométriques de même pulsation ω , définies pour tout réel t , par : $f : t \mapsto \cos \omega t$ et $g : t \mapsto \sin \omega t$.

Nous superposons ces deux fonctions, c'est-à-dire nous en formons une combinaison linéaire, en définissant sur $\mathbb{R}$, la fonction $h : t \mapsto af(t) + bg(t)$.

Montrer que

$$\exists \phi \in]-\pi, \pi], \forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \phi).$$

3. *Application.* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = -2$.

1. Soient a et b deux réels non nuls. Nous avons $0 < a^2 \leq a^2 + b^2$. Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons

$$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ soit } |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

ce qui implique car, $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$,

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1.}$$

Nous avons aussi $0 < b^2 \leq a^2 + b^2$, et nous disposons donc également de l'encadrement

$$\boxed{-1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1.}$$

2. Pour tout réel t , nous avons

$$h(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega t \right)$$

Puisque les termes sont compris entre -1 et 1 , il existe un réel $\phi \in]-\pi, \pi]$ unique qui satisfait à

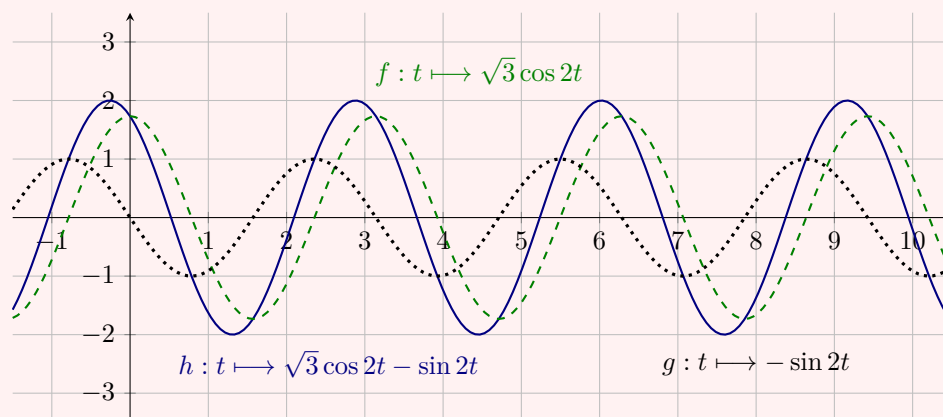
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \phi \quad \text{et} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \phi$$

Par suite, nous obtenons

$$h(t) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \phi)$$

Remarque. Nous avons ainsi prouvé le principe de superposition utilisé en Physique qui stipule qu'une combinaison linéaire de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation ω restitue un signal de pulsation identique accompagné d'un déphasage ϕ .

Nous illustrons graphiquement ce principe en prenant pour exemple la fonction $h : t \mapsto \sqrt{3} \cos 2t - \sin 2t$ qui est proposée dans l'application qui suit.



3. *Application.* Pour tout réel x , posons $h(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$.

Dans cet exemple, $a = \sqrt{3}$ et $b = -1$, ce qui donne $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$.
Nous obtenons

$$h(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x \right) = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right).$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = -2 &\iff 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -2 \\ &\iff \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \\ &\iff 2x + \frac{\pi}{6} = \pi[2\pi] \\ &\iff x = \frac{5\pi}{12}[\pi]. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 9 (★★☆☆) Expression rationnelle de $\cos x$ et $\sin x$

1. En utilisant les formules de passage à l'angle « moitié », montrer que pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, nous disposons des deux égalités :

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad ; \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

2. En posant $t = \tan \frac{x}{2}$, avec $x \neq \pi[2\pi]$, exprimer rationnellement $\sin x$ et $\cos x$ en fonction du réel t .

1. Soit un réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous savons que $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. D'une part nous avons

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}.$$

D'autre part il vient

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

2. En remplaçant x par $\frac{x}{2}$ dans les deux égalités ci-dessus, pour $x \neq \pi [2\pi]$, nous obtenons

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$, pour tout réel t , les deux égalités :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

expriment rationnellement $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 10 (★★★★) Calcul d'une somme de fonctions trigonométriques

Soient un réel $x \neq 0 [2\pi]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous considérons la fonction (s_n) définie par :

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx.$$

1. En utilisant une des formules qui transforme un produit en une somme vue dans l'exercice 5, montrer que

$$2s_n(x) \sin \frac{x}{2} = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}.$$

En utilisant une des formules qui transforme une somme en un produit vue dans l'exercice 6, en déduire

$$s_n(x) = \frac{\sin \left(n \frac{x}{2} \right) \cos \left((n+1) \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

2. Pour tout réel $x \neq 0 [2\pi]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire le calcul de la somme

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos^2 kx.$$

1. Soient un réel $x \neq 0 [2\pi]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$2s_n(x) \sin \frac{x}{2} = 2 \left(\sum_{k=1}^n \cos kx \right) \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^n 2 \cos kx \sin \frac{x}{2}.$$

En employant l'égalité $2 \cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, nous obtenons

$$2 \cos kx \sin \frac{x}{2} = \sin \left(kx + \frac{x}{2} \right) - \sin \left(kx - \frac{x}{2} \right).$$

Il en résulte par télescopage :

$$2s_n(x) \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right) = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}.$$

Nous en déduisons avec $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$:

$$2s_n(x) \sin \frac{x}{2} = 2 \sin n \frac{x}{2} \cos \left(n + 1 \right) \frac{x}{2} \implies s_n(x) = \frac{\sin n \frac{x}{2} \cos \left(n + 1 \right) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous avons $\cos^2 kx = \frac{1}{2}(1 + \cos k(2x))$. Il en résulte

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(1 + \cos k(2x)) = \frac{1}{2}(n+1 + s_n(2x)) = \frac{1}{2}\left(n+1 + \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x}\right)$$

Exercice 11 (★★★★☆) Une inégalité

Soit x un réel quelconque.

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

Soit x un réel quelconque.

Initialisation.

Pour $n = 1$, nous avons $|\sin 1x| \leq 1 |\sin x|$, l'inégalité est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité.

Nous supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on ait $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

Nous avons

$$|\sin(n+1)x| = |\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$|\sin(n+1)x| \leq |\sin nx| |\cos x| + |\cos nx| |\sin x|.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et sachant que $|\cos nx| \leq 1$ et $|\cos x| \leq 1$, nous en déduisons

$$|\sin(n+1)x| \leq n |\sin x| + |\sin x|, \text{ soit } |\sin(n+1)x| \leq (n+1) |\sin x|.$$

Ainsi l'inégalité est héréditaire. Nous en concluons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\sin nx| \leq n |\sin x|.$$

Calculs de limites

Exercice 12 (★☆☆☆☆) sin d'un angle en degré

Soient $h \in [0, 180]$ et $x = \frac{\pi}{180}h$ les mesures respectivement en degrés et en radians d'un même angle.

Nous définissons la fonction $\sin^\circ$, en posant : $\sin^\circ h = \sin x = \sin \frac{\pi}{180}h$.

Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^\circ h}{h}$.

Pour tout réel $h \in [0, 180]$, nous avons

$$\frac{\sin^\circ h}{h} = \frac{\sin \frac{\pi}{180}h}{h} = \frac{\sin \frac{\pi}{180}h}{\frac{\pi}{180}h} \times \frac{\pi}{180}.$$

Par composition, nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180}h}{\frac{\pi}{180}h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nous en concluons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^\circ h}{h} = \frac{\pi}{180}.$$

■ *Remarque.* Par abus de langage, on confond les fonctions $\sin^\circ$ et $\sin$.

Exercice 13 (★★☆☆) Une limite remarquable en 0

1. Pour tout réel x , justifier que $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ admet pour limite $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

2. En déduire les limites en a des fonctions suivantes :

- a) $g : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}$, en $a = 0$,
 b) $h : x \mapsto \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$, en $a = 0$,
 c) $k : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{\cos 2x}$, en $a = \frac{\pi}{4}$.

1. En passant à l'angle moitié, nous savons que, pour tout réel x , $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, ce qui donne

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous en déduisons

$$f(x) = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient :

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{4x^2} \times \frac{4x^2}{\sin^2 2x} = \frac{1}{4} \times f(x) \times \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right)^2$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

et par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X}{\sin X} = 1,$$

nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}.$$

- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient :

$$h(x) = \frac{\cos 2x - 1}{(2x)^2} \times (2x)^2 \times \frac{1}{x \sin x} = 4 \times f(2x) \times \frac{x}{\sin x}.$$

Comme, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{(2x)^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\cos X - 1}{X^2} = -\frac{1}{2},$$

puisque de plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

nous en concluons

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -2.}$$

c) Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{4}$, nous posons $h = x - \frac{\pi}{4}$.

Ainsi, pour $h \neq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} k\left(h + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1 - \sqrt{2} \cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\left(h + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2} \left(\cos h \cos \frac{\pi}{4} - \sin h \sin \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2h + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{1 - \cos h + \sin h}{-\sin 2h} \\ &= \frac{1 - \cos h}{-\sin 2h} - \frac{\sin h}{\sin 2h} \\ &= -\frac{h}{2} \times \frac{2h}{\sin 2h} \times \frac{1 - \cos h}{h^2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{h} \times \frac{2h}{\sin 2h} \end{aligned}$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} &= 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} &= 0 \end{aligned}$$

De plus, par composition, nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{\sin 2h} = 1.$$

Par conséquent, par produit et différence, nous en concluons

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} k(x) = -\frac{1}{2}.}$$

Exercice 14 (★☆☆☆) Limites et fonction tan

- Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$.
- Déterminer la limite en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

1. La fonction tan est dérivable en 0, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1,$$

ce qui donne

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.}$$

Remarque. En observant que, pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x},$$

nous disposons d'une seconde méthode pour calculer cette limite.

2. La fonction $\tan$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et $1 = \tan \frac{\pi}{4}$, par suite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \tan' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2,$$

ce qui permet de conclure par

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2.$$

Applications de la dérivation de sin et cos

Exercice 15 (★★★☆☆) Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(\pi x)$.

Nous désignons par $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de cette fonction relativement à un repère ortho-normal du plan.

- Quelle est la parité de f ? Sur quel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?
- Montrer que pour tout réel x , $f(x-2) = f(x) - 2$.
 - En déduire qu'il existe une translation T qui laisse globalement invariante la courbe $\mathcal{C}_f$, c'est-à-dire :
$$\forall M \in \mathcal{C}_f, \quad T(M) \in \mathcal{C}_f.$$
 - Sur quel intervalle peut-on à nouveau restreindre l'étude de f ? Contrôler graphiquement.
- Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[0,1]$? En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une infinité de tangentes horizontales.
- Montrer que pour tout réel x , nous disposons de la double inégalité : $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.
- Étudier l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite (d) d'équation $y = x + 1$. Traiter la même question avec la droite (d') d'équation $y = x - 1$.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est « symétrique » par rapport à 0.

Pour tout réel x , la fonction $\sin$ étant impaire, nous obtenons

$$f(-x) = -x + \sin(\pi(-x)) = -x - \sin(\pi x) = -f(x),$$

ce qui prouve que f est une fonction impaire.

L'origine O du repère est donc un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_f$. Nous en déduisons que nous pouvons restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. a) Puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x , nous avons $x - 2 \in \mathbb{R}$.

De plus, la fonction $\sin$ étant 2π -périodique, il vient

$$\begin{aligned} f(x-2) &= x-2 + \sin(\pi(x-2)) \\ &= x-2 + \sin(\pi x - 2\pi) \\ &= x-2 + \sin(\pi x) \\ &= f(x) - 2. \end{aligned}$$

- b) Nous considérons la translation T de vecteur $\vec{u}(2,2)$.

Soient un point $M(x,y)$ et son translaté $T(M) = M'(x',y')$.

Nous avons

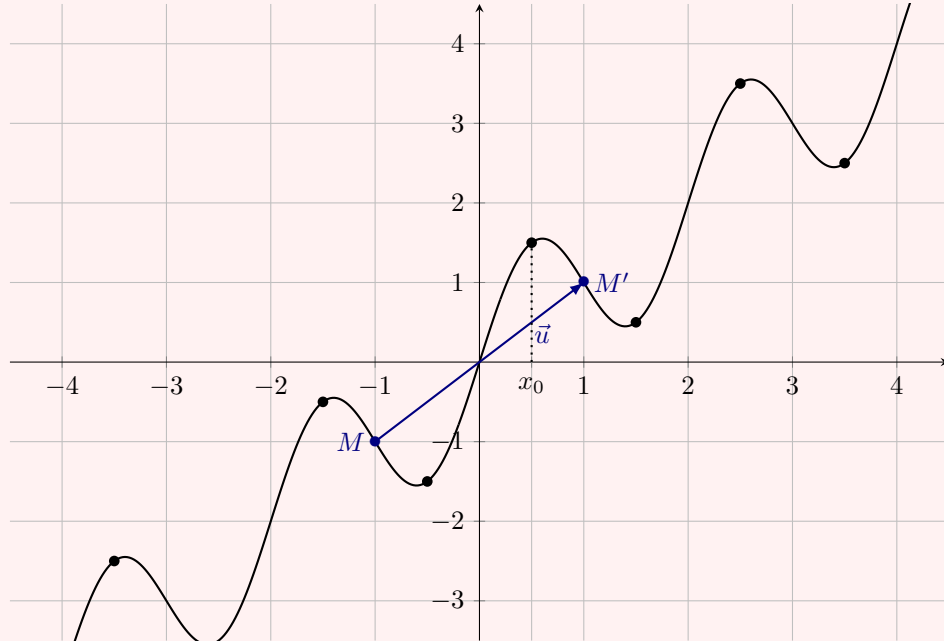
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

Si $M(x, y) \in \mathcal{C}_f$, les coordonnées (x', y') du point $T(M)$ par $\vec{u}(2, 2)$ satisfont à

$$y' - 2 = f(x' - 2) = f(x') - 2,$$

soit $y' = f(x')$, ce qui prouve que $M' \in \mathcal{C}_f$.

- c) Nous pouvons restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2, par exemple $[-1, 1]$ et puisque f est impaire, à l'intervalle $[0, 1]$.



3. La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$, par composition et somme.

Pour tout réel $x \in [0, 1]$, nous obtenons

$$f'(x) = 1 + \pi \cos(\pi x).$$

Nous résolvons dans $[0, 1]$, l'équation $f'(x) = 0$. Il vient

$$f'(x) = 0 \iff \cos \pi x = -\frac{1}{\pi}.$$

Puisque $-\frac{1}{\pi} \in]-1, 1[$, nous en déduisons qu'il existe un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\cos \pi x_0 = -\frac{1}{\pi}.$$

Montrons à présent que $f'(x)$ change de signe en x_0 .

Si $0 \leq x \leq x_0$, alors $0 \leq \pi x \leq \pi x_0 \leq \pi$, ce qui implique, puisque la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, \pi]$,

$$\cos \pi x_0 \leq \cos \pi x \leq 1, \text{ soit } -\frac{1}{\pi} \leq \cos \pi x \leq 1.$$

Nous en déduisons

$$-1 \leq \pi \cos \pi x \leq \pi, \text{ soit } 0 \leq 1 + \pi \cos \pi x \leq 1 + \pi,$$

par suite,

$$0 \leq x \leq x_0 \implies f'(x) \geq 0.$$

Nous démontrons de la même manière que

$$x_0 \leq x \leq 1 \implies f'(x) \leq 0.$$

Nous en concluons que

$$\begin{aligned} f &\text{ est croissante sur l'intervalle } [0, x_0] \\ f &\text{ est décroissante sur l'intervalle } [x_0, 1] \end{aligned}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en point d'abscisse x si et seulement si $f'(x) = 0$.

Sachant que $\cos \pi x_0 = -\frac{1}{\pi}$, avec $x_0 \in [0, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \cos \pi x = -\frac{1}{\pi} = \cos \pi x_0 \\ &\iff \pi x \equiv \pi x_0 [2\pi] \text{ ou } \pi x \equiv -\pi x_0 [2\pi] \\ &\iff x \equiv x_0 [2] \text{ ou } x \equiv -x_0 [2] \end{aligned}$$

Nous en concluons que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une infinité de tangentes horizontales aux points de cette courbe, d'abscisses $x_0 + 2k$ ou d'abscisses $-x_0 + 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Nous savons que pour tout réel x ,

$$-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1,$$

ce qui entraîne

$$x - 1 \leq x + \sin(\pi x) \leq x + 1.$$

Ainsi, nous en concluons

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 \leq f(x) \leq x + 1.}$$

5. Soit $M(x, y)$ un point appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$ et à la droite (d) . Les coordonnées (x, y) satisfont au système

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Nous en déduisons l'équation aux « abscisses » :

$$\begin{aligned} f(x) = x + 1 &\iff x + \sin(\pi x) = x + 1, \\ &\iff \sin(\pi x) = 1, \\ &\iff \pi x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{1}{2} [2]. \end{aligned}$$

Nous en concluons que $\mathcal{C}_f$ et la droite (d) ont en commun une infinité de points d'abscisses $\frac{1}{2} + 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

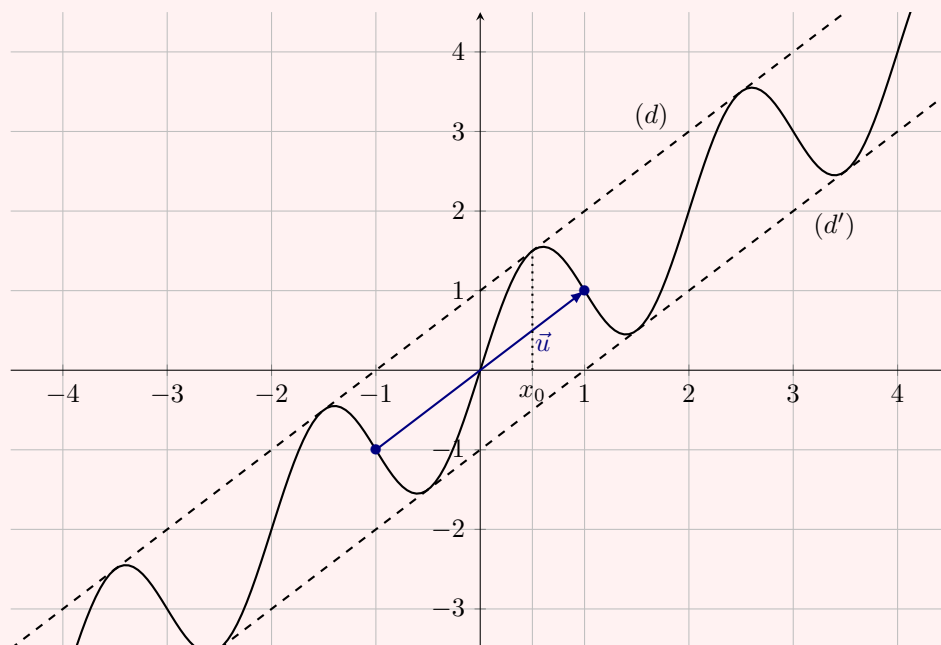
Nous précisons que la droite (d) est tangente en cette infinité de points à la courbe $\mathcal{C}_f$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2} + 2k\right) &= 1 + \pi \cos \pi \left(\frac{1}{2} + 2k\right) \\ &= 1 + \pi \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &= 1 + \pi \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ce qui justifie que $f' \left(\frac{1}{2} + 2k \right) = 1$ est le coefficient directeur de la droite (d) .

Nous montrons de la même façon que $\mathcal{C}_f$ et la droite (d') ont en commun une infinité de points d'abscisses $-\frac{1}{2} + 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et que cette droite est tangente en cette infinité de points à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Nous représentons graphiquement :



Exercice 16 (★★★★) Inégalité de Huygens

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$.

- Justifier que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer qu'il existe un polynôme p tel que, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = \frac{p(\cos x)}{\cos^2 x}.$$

- Déterminer le sens de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

En déduire l'inégalité de Huygens :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 2 \sin x + \tan x \geq 3x.$$

- La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme somme et différence de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \\ &= \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

En posant, pour tout réel x , $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{p(\cos x)}{\cos^2 x}.$$

2. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $p(\cos x)$.

Puisque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous en déduisons $\cos x \in]0, 1]$.

Il s'agit donc de déterminer le signe du réel $p(x)$ pour $x \in]0, 1]$.

Nous observons que $p(1) = 0$. Par conséquent nous mettons $x - 1$ en facteur et par une identification rapide, pour tout réel $x \in]0, 1]$, nous obtenons

$$p(x) = (x - 1)(2x^2 + bx - 1).$$

En développant, il vient

$$\begin{aligned}(x - 1)(2x^2 + bx - 1) &= 2x^3 + bx^2 - x - 2x^2 - bx + 1, \\ &= 2x^3 + (b - 2)x^2 - (b + 1)x + 1.\end{aligned}$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} b - 2 = -3 \\ b + 1 = 0 \end{cases} \iff b = -1.$$

Quel que soit $x \in]0, 1]$, nous en déduisons

$$p(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 1).$$

Nous remarquons que 1 est une racine évidente du trinôme $2x^2 - x - 1$; l'autre racine est donc $-\frac{1}{2}$ car le produit des racines est égal à $-\frac{1}{2}$.

Il en résulte que pour tout réel $x \in]0, 1]$, nous avons

$$p(x) = 2(x - 1)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

ce qui prouve, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, que

$$p(\cos x) \geq 0, \text{ soit } f'(x) \geq 0.$$

Nous en concluons que la fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En remarquant que $f(0) = 0$, nous en déduisons, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x \geq 0 \implies f(x) \geq f(0), \text{ c'est-à-dire } f(x) \geq 0.$$

L'inégalité attendue est acquise, ce qui donne

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 2 \sin x + \tan x \geq 3x.}$$

Exercice 17 (★★★★) Encadrement de sin et cos par des polynômes

1. En étudiant le sens de variations sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto x - \sin x$, justifier, pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité $\sin x \leq x$.
2. De la même façon, pour tout réel $x \geq 0$, prouver les trois inégalités suivantes :

a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x,$

b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x,$

c) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$

3. En déduire un encadrement des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$:

a) sur $[0, +\infty[$,

b) sur $] -\infty, 0]$.

4. *Application 1.* Quelle est la limite en 0 de la fonction $\tau : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$? En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 .

5. *Application 2.* Quelle est la limite en $+\infty$ de la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)} ?$$

1. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ par différence.

Pour tout réel $x \geq 0$, nous obtenons

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

Puisque, quel que soit $x \geq 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, nous en déduisons

$$f'(x) \geq 0,$$

ce qui implique que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.

En remarquant que $f(0) = 0$,

$$x \geq 0 \implies f(x) \geq f(0), \text{ soit } x - \sin x \geq 0.$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \sin x \leq x.}$$

2. a) Nous posons, pour tout réel $x \in [0, +\infty[$,

$$g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ par différence.

Pour tout réel $x \geq 0$, nous obtenons

$$g'(x) = -\sin x + x = f(x) \geq 0,$$

ce qui justifie que la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$.

Puisque $g(0) = 0$,

$$x \geq 0 \implies g(x) \geq g(0), \text{ soit } \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0.$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.}$$

b) Nous posons, pour tout réel $x \in [0, +\infty[$,

$$h(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right).$$

La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ par différence.

Pour tout réel $x \geq 0$, nous obtenons

$$h'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = g(x) \geq 0,$$

ce qui montre que la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$.

Puisque $h(0) = 0$,

$$x \geq 0 \implies h(x) \geq h(0), \text{ soit } \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geq 0$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.}$$

c) Nous posons, pour tout réel $x \in [0, +\infty[$,

$$k(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x.$$

La fonction k est dérivable sur $[0, +\infty[$ par différence.

Pour tout réel $x \geq 0$, nous obtenons

$$k'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = h(x) \geq 0,$$

ce qui prouve que la fonction k est croissante sur $[0, +\infty[$.

Puisque $h(0) = 0$,

$$x \geq 0 \implies k(x) \geq k(0), \text{ soit } 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x \geq 0.$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.}$$

3. a) Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{6} &\leq \sin x \leq x \\ 1 - \frac{x^2}{2} &\leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

b) Pour déterminer ces deux encadrements lorsque $x \in]-\infty, 0]$, nous remplaçons x par $-x \geq 0$ dans les deux doubles inégalités ci-dessus.

Pour tout réel $x \leq 0$, il vient, d'une part

$$-x - \frac{(-x)^3}{6} \leq \sin(-x) \leq -x,$$

soit

$$-x + \frac{x^3}{6} \leq -\sin x \leq -x,$$

ce qui donne

$$\boxed{\forall x \leq 0, \quad x \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6}.}$$

D'autre part, pour $x \leq 0$, nous obtenons

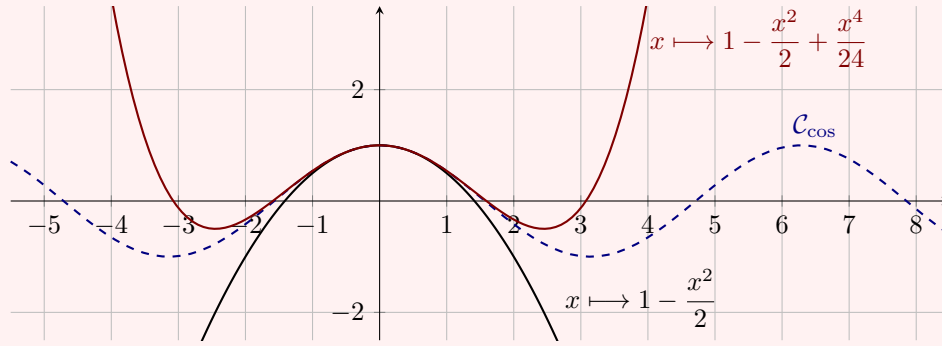
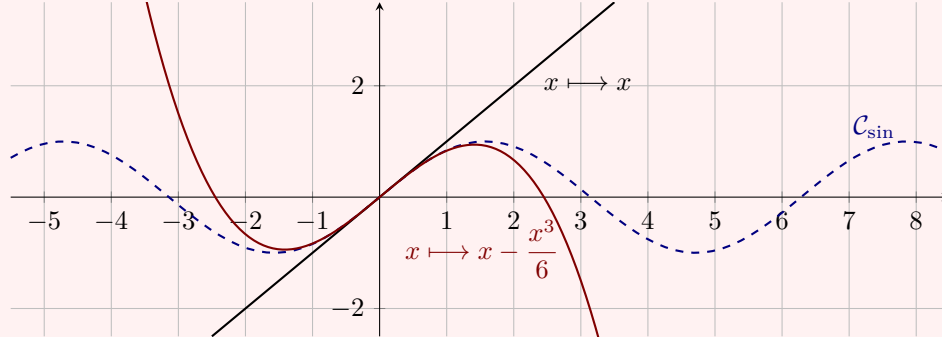
$$1 - \frac{(-x)^2}{2} \leq \cos(-x) \leq 1 - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^4}{24}$$

ce qui donne

$$\forall x \leq 0, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Nous remarquons que l'encadrement de $x \mapsto \cos x$ est validé sur $\mathbb{R}$.

Nous illustrons graphiquement les inégalités obtenues :



4. Quand x tend vers 0, nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Pour lever cette indétermination, nous utilisons un encadrement de $\sin x$ en distinguant par disjonction les deux cas, $x > 0$ ou $x < 0$.

1^{er} cas : $x > 0$.

Nous savons que dans ce cas

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x,$$

ce qui implique

$$-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0.$$

En divisant par $x^2 > 0$, nous obtenons

$$-\frac{x}{6} \leq \tau(x) \leq 0.$$

Par encadrement, $x \mapsto \tau(x)$ admet une limite en 0 à droite et nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = 0.$$

2^e cas : $x < 0$.

De la même façon, dans ce cas, nous savons que

$$x \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6},$$

ce qui implique

$$0 \leq \sin x - x \leq -\frac{x^3}{6}.$$

En divisant par $x^2 > 0$, nous obtenons

$$0 \leq \tau(x) \leq -\frac{x}{6}.$$

Par encadrement, $x \mapsto \tau(x)$ admet une limite en 0 à gauche et nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tau(x) = 0.$$

L'égalité de la limite à droite et à gauche en 0, prouve que la fonction τ admet une limite en 0.

Ainsi nous en concluons que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0.}$$

Pour étudier la dérivabilité de la fonction f en 0, nous considérons, pour $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

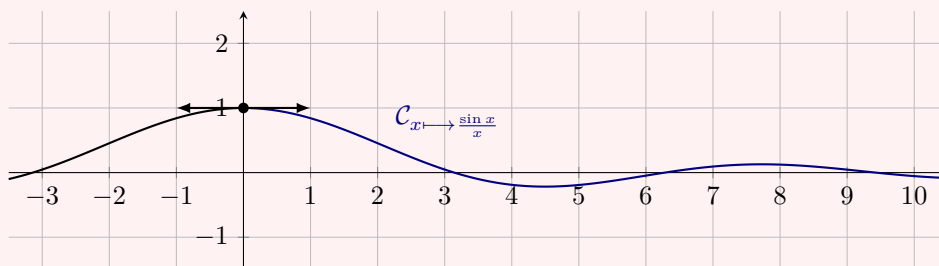
Il vient, pour tout réel x non nul,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2} = \tau(x).$$

Nous en déduisons

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0.}$$

Nous en concluons que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Nous ajoutons que la courbe représentative de f admet, au point de coordonnées (0,1), une tangente horizontale, ce que nous contrôlons sur la figure ci-dessous.



5. Quand n tend vers $+\infty$, nous observons une indétermination au numérateur et au dénominateur de u_n du type « $0 \times +\infty$ ».

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ Pour transformer le numérateur, nous utilisons l'encadrement

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

en remplaçant x par $\frac{1}{n} > 0$. Il vient

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne

$$1 - \frac{1}{6n^2} \leq n \sin \frac{1}{n} \leq 1,$$

soit

$$-1 \leq -n \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6n^2} - 1.$$

Ainsi, nous obtenons

$$0 \leq 1 - n \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6n^2}$$

▷ Pour transformer le dénominateur, nous utilisons l'encadrement

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

en remplaçant x par $\frac{1}{n} > 0$. Nous obtenons

$$1 - \frac{1}{2n^2} \leq \cos \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4}$$

ce qui donne

$$-1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{24n^4} \leq -\cos \frac{1}{n} \leq -1 + \frac{1}{2n^2},$$

soit

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{24n^4} \leq 1 - \cos \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^3} \leq n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{2n},$$

c'est-à-dire

$$0 < \frac{12n^2 - 1}{24n^3} \leq n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{2n}.$$

Par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, il vient

$$0 < 2n \leq \frac{1}{n(1 - \cos \frac{1}{n})} \leq \frac{24n^3}{12n^2 - 1}.$$

▷ En multipliant membres à membres l'encadrement du numérateur avec celui de l'inverse du dénominateur, nous obtenons

$$0 \leq u_n \leq \frac{4n}{12n^2 - 1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{12n^2 - 1} = 0$, par encadrement, nous en concluons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 18 (★★★☆☆) Une distance minimum

Dans le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O , nous donnons un point $A(a, b)$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Une droite passant par A coupe la droite des abscisses en un point M d'abscisse positive et la droite de ordonnées en point N d'ordonnée positive.

Nous désignons par :

- $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, une mesure de l'angle $\widehat{OMA}$,
- $d(x)$ la distance MN .

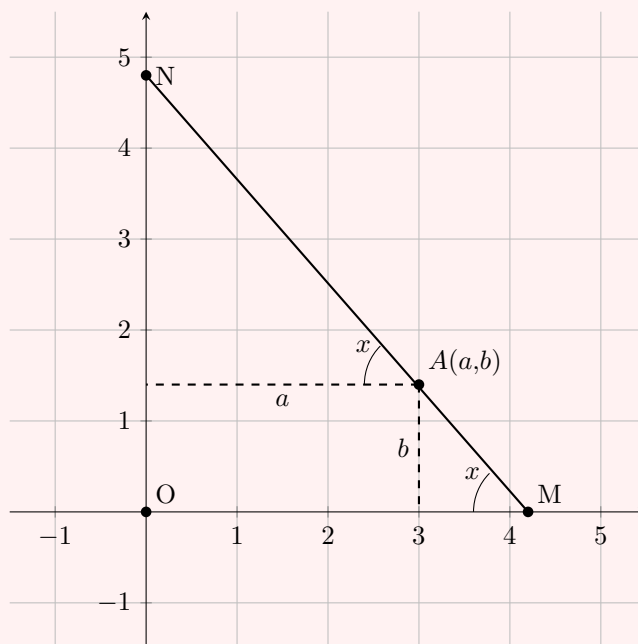
1. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, justifier que

$$d(x) = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}.$$

2. Justifier que la fonction $d : x \mapsto d(x)$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Montrer que l'équation $d'(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tel que : $\tan x_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

3. Montrer que la fonction d atteint un minimum en x_0 . Donner un algorithme qui restitue ce minimum, les valeurs des réels $a > 0$ et $b > 0$ étant choisies par l'utilisateur.



1. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $[AM]$, nous avons

$$\frac{b}{AM} = \sin x, \quad \text{donc } AM = \frac{b}{\sin x}.$$

Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $[AN]$, nous avons

$$\frac{a}{AN} = \cos x, \quad \text{donc } AN = \frac{a}{\cos x}.$$

Puisque $A \in [MN]$, nous obtenons

$$d(x) = MN = MA + AN = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}.$$

2. La fonction $d : x \mapsto d(x)$ est, par inverse et somme, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il vient

$$\begin{aligned} d'(x) &= -\frac{a \cos' x}{\cos^2 x} - \frac{b \sin' x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{a(-\sin x)}{\cos^2 x} - \frac{b \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{a \sin x}{\cos^2 x} - \frac{b \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{a \sin^3 x - b \cos^3 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \end{aligned}$$

Nous en déduisons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 d'(x) = 0 &\iff a \sin^3 x = b \cos^3 x, \\
 &\iff \frac{b}{a} = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \\
 &\iff \frac{b}{a} = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^3, \\
 &\iff (\tan x)^3 = \frac{b}{a}, \\
 &\iff \tan x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.
 \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} > 0$, il existe un unique réel $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\tan x_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Par suite, nous obtenons

$$d'(x) = 0 \iff \tan x = \tan x_0.$$

Puisque $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, nous en concluons

$$\boxed{d'(x) = 0 \iff x = x_0.}$$

3. Nous étudions le sens de variations de $x \mapsto d(x)$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour cela, nous résolvons l'inéquation $d'(x) \geq 0$. il vient :

$$\begin{aligned}
 d'(x) \geq 0 &\iff a \sin^3 x - b \cos^3 x \geq 0 \\
 &\iff a \sin^3 x \geq b \cos^3 x \\
 &\iff \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \geq \frac{b}{a} \\
 &\iff (\tan x)^3 \geq \frac{b}{a} \\
 &\iff \tan x \geq \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \\
 &\iff \tan x \geq \tan x_0
 \end{aligned}$$

Nous montrons à présent l'implication

$$\tan x \geq \tan x_0 \Rightarrow x \geq x_0.$$

En effet, par l'absurde, supposons que $\tan x \geq \tan x_0$ et $x < x_0$.

La fonction $\tan$ est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$x < x_0 \implies \tan x < \tan x_0,$$

ce qui est contradictoire avec la condition $\tan x \geq \tan x_0$.

Par conséquent l'implication proposée est vraie. Comme la fonction $\tan$ est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il en est de même de l'implication réciproque. Nous en concluons

$$d'(x) \geq 0 \iff x \geq x_0.$$

Nous démontrons de la même manière que

$$d'(x) \leq 0 \iff x \leq x_0.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto d(x)$ est :

- décroissante sur l'intervalle $]0, x_0]$,
- croissante sur l'intervalle $\left[x_0, \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction d atteint donc un minimum en x_0 .

Nous donnons un algorithme qui restitue ce minimum, les valeurs des réels $a > 0$ et $b > 0$ étant choisies par l'utilisateur.

Algorithme en Python :

```

1 from math import *
2
3 a=float(input("a="))
4 b=float(input("b="))
5 x=atan((a/b)**(1/3))
6 d=a/cos(x)+b/sin(x)
7 print(d)

```

Exercice 19 (★★☆☆) Un encadrement de $x \mapsto \cos x$

Nous désignons par $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$, lorsque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point B .
2. Déterminer une équation de la droite (AB) .
3. Justifier l'encadrement

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x.$$

1. Une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est

$$y = \cos' \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

ce qui donne

$$(T) : y = x - \frac{\pi}{2}.$$

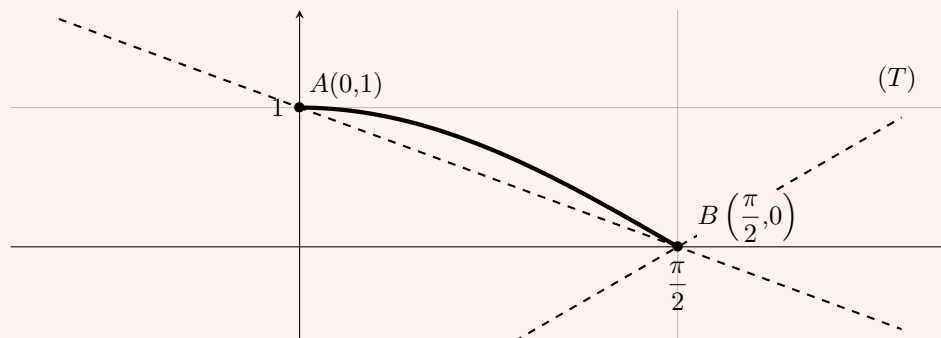
2. Nous avons $A(0,1)$ et $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Il en résulte qu'une équation de la droite (AB) est

$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}x + 1 = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}}x + 1.$$

Nous en concluons

$$(AB) : y = -\frac{2}{\pi}x + 1.$$

3. Graphiquement, nous obtenons :



L'encadrement attendu est, dans un premier temps, validé graphiquement. Plus rigoureusement, la fonction $x \mapsto \cos x$ est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car, pour tout réel x appartenant à cet intervalle,

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= -\sin(x) \\ \cos''(x) &= -\cos(x) \leq 0\end{aligned}$$

Nous savons que la courbe représentative d'une fonction concave est

- en-dessous de ses tangentes,
- au-dessus de ses cordes.

En particulier la courbe $\mathcal{C}$ est

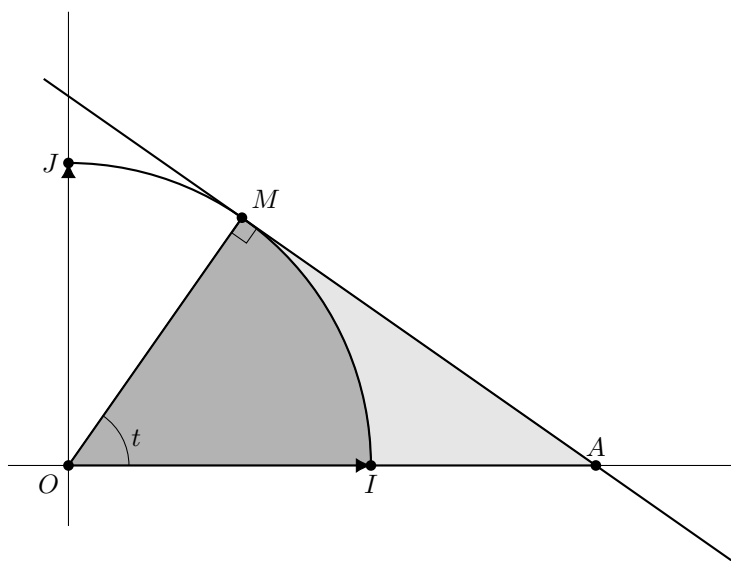
- en-dessous de sa tangente (T) ,
- au-dessus de sa corde (AB) ,

ce qui signifie

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x.$$

Exercice 20 (★★★★☆) Comparaison de deux aires

Soient $\mathcal{C}$ un quart de cercle de rayon 1 et $M \in \mathcal{C}$. Avec les notations de la figure ci-après, l'angle $\widehat{IOM}$ a pour mesure en radian le réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



La tangente en M au quart de cercle $\mathcal{C}$ coupe la droite (OI) en un point A .

Nous proposons de comparer l'aire $f(t)$ du secteur angulaire IOM avec l'aire $g(t)$ de la partie du plan OMA située à l'extérieur du secteur. Pour cela, nous posons, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(t) = f(t) - g(t)$.

1. Prouver que, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$h(t) = t - \frac{\tan t}{2}.$$

2. En étudiant le sens de variations de la fonction h sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, justifier que l'équation $h(t) = 0$ admet une unique solution $t_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie ou celui de Newton donner une valeur approchée avec une précision choisie par l'utilisateur. Conclure.

1. Soit un réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

▷ Nous rappelons que l'aire d'un secteur angulaire $\mathcal{A}$ sur un disque de rayon r associé à un angle au centre de mesure t radians est donnée par l'égalité

$$\mathcal{A} = \frac{r^2}{2}t$$

Dans notre énoncé, $r = 1$, ce qui donne

$$f(t) = \frac{t}{2}.$$

▷ Calculons $g(t)$.

* L'aire $a(t)$ du triangle OMA , rectangle en M est égale à

$$a(t) = \frac{OM \times MA}{2} = \frac{MA}{2}.$$

* Déterminons les coordonnées du point A , puis la distance MA .

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}(\cos t, \sin t)$ et $\overrightarrow{MA}(x_A - \cos t, -\sin t)$ sont orthogonaux.

Puisque la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est orthonormale, il vient

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = (\cos t)(x_A - \cos t) + (\sin t)(-\sin t) = 0$$

ce qui donne

$$x_A(\cos t) - \cos^2 t - \sin^2 t = 0,$$

soit

$$x_A(\cos t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Puisque $\cos t \neq 0$, nous obtenons

$$x_A = \frac{1}{\cos t}, \text{ c'est-à-dire } A\left(\frac{1}{\cos t}, 0\right).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} MA^2 &= \left(\frac{1}{\cos t} - \cos t\right)^2 + (-\sin t)^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2 t} - 2 \times \frac{1}{\cos t} \times \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= \frac{1}{\cos^2 t} - 2 + 1 \\ &= \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \\ &= \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \\ &= \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \\ &= \tan^2 t \end{aligned}$$

Puisque $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan t \geq 0$, ce qui donne

$$MA = \tan t.$$

* Nous en déduisons

$$g(t) = a(t) - f(t) = \frac{MA}{2} - f(t) = \frac{1}{2} \tan t - \frac{t}{2}.$$

▷ Quel que soit le réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous en concluons

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - g(t) \\ &= \frac{t}{2} - \left(\frac{1}{2} \tan t - \frac{t}{2}\right) \\ &= t - \frac{\tan t}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad h(t) = t - \frac{\tan t}{2}.$$

2. La fonction h est dérivable par différence sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous obtenons :

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 t} = \frac{2 \cos^2 t - 1}{2 \cos^2 t} = \frac{\cos(2t)}{2 \cos^2 t}.$$

Nous en déduisons, puisque $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} h'(t) = 0 &\iff \cos(2t) = 0 \\ &\iff 2t = \frac{\pi}{2} \\ &\iff t = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} h'(t) > 0 &\iff 0 \leq t < \frac{\pi}{4}, \\ h'(t) < 0 &\iff \frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Le tableau de variations de la fonction h est

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	+	0	-
h	0	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	$-\infty$

Nous avons

$$h(0) = 0$$

et

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Puisque h est croissante strictement et continue sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, nous en déduisons que h est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur son image $\left]0, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$.

Comme $0 \notin \left]0, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$, il en résulte

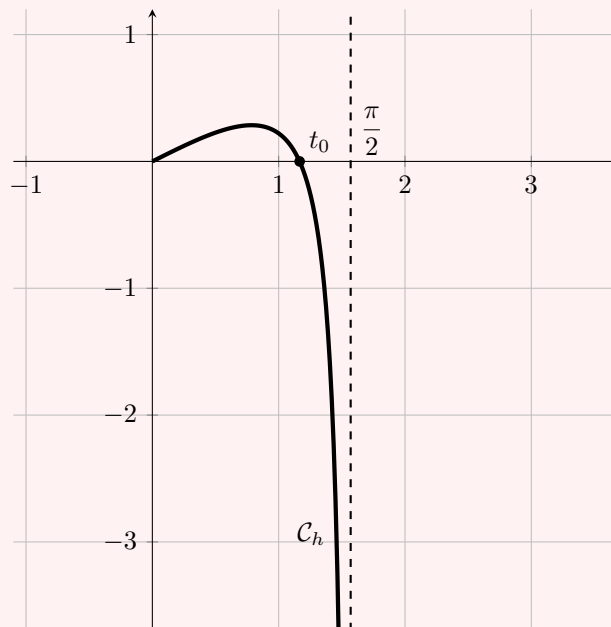
$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \quad h(t) > 0.$$

Puisque h est décroissante strictement et continue sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous en déduisons que h est une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur son image

$$\left] \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan t, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] = \left] -\infty, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right].$$

Comme $0 \in \left] -\infty, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right]$, nous en concluons que l'équation $h(t) = 0$ admet une unique solution $t_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire une unique solution $t_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Pour localiser la solution t_0 , nous contrôlons graphiquement.



Nous déterminons une valeur approchée à 10^{-3} près de t_0 par dichotomie avec ce code Python :

```

1  from math import *
2
3  def f(x) :
4      return x - 0.5* tan (x)
5
6  def dichotomie(f,a,b,p):
7      while b-a>10**(-p):
8          m=(a+b)/2
9          if f(a)*f(m)<0:
10             b=m
11         else:
12             a=m
13     return(b)

```

Après exécution, nous obtenons

```

>>> dichotomie(f, 1,1.5,3)
1.166015625

```

C'est-à-dire $t_0 \approx 1,166$ à 10^{-3} près.

Nous déterminons une valeur approchée à 10^{-3} près de t_0 par la méthode de Newton avec ce code Python :

```
1 from math import *
2
3 def f(x) :
4     return x-0.5*tan(x)
5
6 def df(x):
7     return 0.5*cos(2*x)/(\cos(x))**2
8
9 p=int(input("p="))
10 x0=float(input("x0="))
11
12 e=10**(-p)
13 u=x0
14 n=0
15 while f(u)/df(u)>=e :
16     u=u-f(u)/df(u)
17     n=n+1
18 print("apres",n,"iterations",",")
19 print("la_solution_", "est_",u,"a",e,"pres")
```

Après exécution, nous obtenons

```
>>>
apres 6 iterations,
la solution est 1.165591659098515 a 0.001 pres
```

C'est-à-dire $t_0 \approx 1,165$ à 10^{-3} près.

Nous en concluons que

$$\begin{array}{l} f(t) \geq g(t) \iff t \in [0, t_0] \\ f(t) \leq g(t) \iff t \in \left[t_0, \frac{\pi}{2} \right[\end{array}$$