



TD 14 Primitives et équations différentielles

Calculs de primitives

Exercice 1 (★★☆☆) Primitives et fonction $\ln$

1. Quelles sont les primitives des fonctions suivantes

$$\begin{array}{l} f \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\ln x}{x} \end{array} \right. \\ g \left| \begin{array}{ll}]1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{x \ln x} \end{array} \right. \end{array}$$

2. En calculant la dérivée sur $]0, +\infty[$ de la fonction $u : x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln x$, déterminer les primitives de la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En calculant la dérivée sur $]0, +\infty[$ de la fonction $v : x \mapsto x \ln x$, déterminer les primitives L de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 (★★☆☆) Primitives de fonctions trigonométriques

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \cos(\pi x) \sin^3(\pi x)$, sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \cos^2 x$, sur $\mathbb{R}$.
3. $\tan : x \mapsto \tan x$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. $h : x \mapsto \sin(x) \cos(x) e^{-\cos(2x)}$, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (★★★★☆) Primitives et parité

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f .

1. Si f est impaire, qu'en est-il de la parité de F ?
2. Si f est paire, à quelle condition initiale F doit-elle satisfaire pour déterminer la parité de cette dernière?

Exercice 4 (★★★★) Fonction arctan

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par conséquent admet des primitives sur cet intervalle.

À notre niveau, nous ne savons pas expliciter ces primitives.

Cependant, nous allons voir comment dégager des propriétés qualitatives de l'une d'entre elles sans la déterminer explicitement.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ avec } f(0) = 0$$

1. a) Quel est le sens de variation de la fonction f ?
 b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'origine O du repère choisi.
 c) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
 d) Quelle est la parité de f ?
2. Étude de la limite de f en $+\infty$.
 a) Déterminer la dérivée sur $]0, +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.
 b) En déduire qu'il existe un réel c tel que, pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- c) Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. Composée de f avec la fonction $\tan$.

Nous considérons la fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$x \mapsto f(\tan x) - x$$

- a) Déterminer la dérivée de h .
 - b) En déduire que, pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
- $$f(\tan x) = x$$
4. Calculer les images par f des réels $1, \sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Quelle est la valeur exacte de la limite de f en $+\infty$?
 5. En exploitant les informations obtenues lors des questions précédentes, donner une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
-

Méthode d'Euler et primitives

Exercice 5 (★★★☆☆) Résolution de l'équation $y' = \frac{1}{1+x^2}$

Nous proposons une méthode algorithmique pour construire une approximation de la courbe représentative de la solution f , sur un intervalle choisi, de cette équation différentielle qui satisfait à la condition initiale $f(0) = 0$.

Soit un réel $b > 0$ et $[0, b]$ l'intervalle choisi.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $h = \frac{b}{n}$, nous définissons une subdivision de l'intervalle $[0, b]$, en considérant la suite (x_k) avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que

$$x_k = kh = k\frac{b}{n}$$

1. Vérifier que, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$x_{k+1} = x_k + h$$

2. En déduire que l'approximation affine de f en x_k est

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + \frac{h}{h^2 k^2 + 1}$$

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, nous considérons les points $M_k(x_k, y_k)$ tels que :

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{h^2 k^2 + 1} \end{cases}$$

La méthode d'Euler permet d'approcher la courbe $\mathcal{C}_f$ par le nuage de points M_k , le réel $b > 0$ et l'entier naturel n non nul étant choisis.

3. Proposer un programme Python qui dessine les points M_k dans un repère.
-

Exercice 6 (★★★☆☆) Primitives de $x \mapsto e^{-x^2}$

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$, admet des primitives que nul ne sait expliciter en utilisant des fonctions élémentaires.

Cependant, nous allons voir comment établir quelques propriétés qualitatives de l'une d'entre elles puis nous employons la méthode d'Euler pour obtenir une allure approximative de sa courbe représentative.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad \text{avec } f(0) = 0$$

1. Quel est le sens de variation de la fonction f ? Quelle est la parité de f ?
2. En se plaçant dans les mêmes conditions que dans l'exercice précédent, justifier que

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + he^{-k^2h^2}$$

3. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, nous considérons les points $M_k(x_k, y_k)$ tels que

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + he^{-k^2h^2} \end{cases}$$

Le réel $b > 0$ et l'entier naturel n non nul étant choisis, proposer un programme Python qui dessine le nuage des points M_k dans un repère.

Équations du 1^{er} ordre

Exercice 7 (★★☆☆☆) Loi de désintégration radioactive

On désigne par $N(t)$ le nombre d'atomes d'une substance radioactive à l'instant t (en secondes).

La loi de désintégration radioactive stipule que le taux de variation du nombre $N(t)$ est proportionnel au nombre $N(t)$.

Ce qui signifie que entre les instants t et $t+h$, on a

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -aN(t),$$

où a est une constante dépendant de la substance radioactive considérée.

1. En supposant que la fonction $t \mapsto N(t)$ est dérivable en $t \geq 0$, justifier que la fonction N est solution de l'équation différentielle $y' = -ay$.
 2. Déterminer la loi de désintégration radioactive, sachant que la condition initiale est $N_0 = N(0)$.
 3. La demi-vie d'une substance radioactive est le temps T au bout duquel la moitié des atomes radioactifs sont désintégrés.
Calculer T en fonction de a .
-

Exercice 8 (★★★☆☆) Équation du premier ordre avec un second membre

On considère l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{e^x}{x^2} \tag{1}$$

On se propose de déterminer les solutions de cette équation qui sont définies sur $]0, +\infty[$.

1. Vérifier que la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est une solution particulière de (1).

2. Prouver qu'une fonction v définie sur $]0, +\infty[$ est une solution de (1) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle

$$y - y' = 0. \quad (2)$$

3. En déduire toutes les solutions définies sur $]0, +\infty[$ de l'équation (1).

Exercice 9 (★★☆☆) Loi de la chute d'un corps

On laisse tomber un corps de masse m , dans le champ de pesanteur. La vitesse v du centre d'inertie de ce corps est fonction du temps t de la chute, et satisfait à l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

où $k > 0$ est le coefficient de freinage dû à la résistance de l'air et g l'accélération de la pesanteur.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la vitesse est nulle. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

3. Quelle est la limite de $t \mapsto v(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.
4. La résistance de l'air est négligée en faisant tendre k vers 0. Déterminer $t \mapsto v(t)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 10 (★★★★) Une équation fonctionnelle

Soient f une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée. Nous supposons que, pour tout réel x , f satisfait à l'équation différentielle, notée (3),

$$(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1, \quad (3)$$

avec $f'(0) = 1$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$.
Calculer $f(0)$.
2. Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' = y$$

3. Nous posons : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

4. Justifier que

$$u' = u \text{ et } v' = -v.$$

5. En déduire qu'il existe une unique fonction f satisfaisant à l'équation (3).

Exercice 11 (★★★★☆) Une équation linéaire à coefficients variables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous désignons par f une fonction distincte de la fonction nulle, dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle

$$xy' + ny = 0 \quad (4)$$

Pour $x > 0$, on pose $g(x) = x^n f(x)$.

1. Montrer que f est solution de (4) si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$, tel que pour tout réel $x > 0$, $g(x) = a$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12 (★★★★) Une équation différentielle non linéaire

On considère l'équation différentielle notée (5),

$$y' = 2y - y^3, \quad \text{avec } y(0) = 1 \quad (5)$$

1. En utilisant la méthode d'Euler, donner un algorithme qui approche graphiquement une solution de (5) sur un intervalle $[0, b]$, où b est un réel positif strictement, puis négatif strictement.

On s'intéresse aux solutions y de (5) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) > 0.$$

Pour tout réel x , on pose $u(x) = \frac{1}{y^2(x)}$.

1. Montrer que $x \mapsto y(x)$ est solution de (5) si et seulement si $x \mapsto u(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$u' = -4u + 2 \quad (6)$$

2. En déduire la solution f de (5) qui satisfait à $f(0) = 1$.

Exercice 13 (★★★★☆) Équation du 1^{er} ordre et trigonométrie

Nous considérons l'équation différentielle (7) définie pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$y' + (1 + \tan x)y = \cos x \quad (7)$$

1. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer qu'une fonction f est une solution de (7) si et seulement si la fonction

$$u : x \mapsto \frac{f(x)}{\cos x}$$

est une solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$.

2. En déduire la solution de (7) dont la représentation graphique passe par l'origine du repère choisi.

Deux exemples d'équations du 2^e ordre

Exercice 14 (★★★★) Équation $y'' = -\omega^2 y$

En physique, le mouvement d'un oscillateur libre non amorti (oscillateur mécanique : ressort, pendule dans le cas des petites oscillations ou oscillateur électrique) est régi par une équation différentielle linéaire du second ordre, notée (8), du type

$$y'' = -\omega^2 y \quad (8)$$

où la constante $\omega > 0$ est la pulsation de l'oscillateur.

1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \theta : x &\mapsto 0 \\ u : x &\mapsto \cos \omega x \\ v : x &\mapsto \sin \omega x \end{aligned}$$

sont solutions de (8).

2. En déduire que la fonction

$$g = au + bv : x \mapsto au(x) + bv(x), \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

est une solution, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation (8).

3. Montrer que si $x \mapsto y(x)$ est une solution de (8), alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h : x \mapsto \omega^2 y^2(x) + (y'(x))^2$$

est constante.

4. Si de plus $y(0) = y'(0) = 0$, justifier que la fonction $x \mapsto y(x)$ est la fonction nulle.

5. Soit y une solution de (8).

On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = y(x) - y(0) \cos \omega x - \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x.$$

Montrer que $x \mapsto \phi(x)$ est une solution de (8).

6. Calculer $\phi(0)$ et $\phi'(0)$.

7. En déduire que l'ensemble des solutions de (8) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme

$$x \mapsto a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x), \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}.$$

8. Les deux réels y_0 et v_0 étant donnés, montrer que (8) admet une solution unique f satisfaisant aux conditions initiales

$$f(0) = y_0 \text{ et } f'(0) = v_0.$$

Exercice 15 (★★★★) Équation différentielle $y'' = \omega^2 y$

Soit ω un réel strictement positif donné.

On désigne par (9) l'équation différentielle :

$$y'' = \omega^2 y \tag{9}$$

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel r , la fonction

$$u : x \mapsto e^{rx}$$

est une solution de l'équation (9).

2. Montrer qu'une fonction f dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ est une solution de (9) si et seulement si la fonction

$$g = f' - \omega f$$

est une solution de l'équation différentielle

$$g' + \omega g = 0 \tag{10}$$

3. En déduire qu'une fonction f est une solution de (9) si et seulement s'il existe un réel λ tel que pour tout réel x ,

$$f'(x) - \omega f(x) = \lambda e^{-\omega x}.$$

4. Prouver que f est une solution de (9) si et seulement si la fonction

$$h : x \mapsto e^{-\omega x} f(x)$$

est telle que, pour tout réel x :

$$h'(x) = \lambda e^{-2\omega x}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. En déduire que f est une solution de (9) si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x ,

$$f(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$