



TD 15 Intégration

Calculs d'intégrales

Exercice 1 (★★☆☆) Aire d'un disque

1. Dans un repère orthonormal d'origine O , justifier qu'un point $M(x, y)$ appartient à un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ si et seulement si

$$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ avec } x \in [-r, r].$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

2. Comment évaluer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx ?$$

Exercice 2 (★★★★☆) Concavité de $\ln$

Soient deux réels a et b tels que $1 < a < b$.

Par des considérations d'aires, prouver l'inégalité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln x dx \geq \ln(\sqrt{ab}).$$

Exercice 3 (★★☆☆) Intégrales de fonctions trigonométriques

1. Pour chaque entier $k \geq 1$, déterminer sur $\mathbb{R}$, les primitives F_k de la fonction

$$f_k : x \mapsto \sin x \cos^k x.$$

2. En remarquant que, pour tout réel x , $\sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x$, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \sin^3 x dx.$$

3. Comment calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\pi \sin^3 x \cos^2 x dx ?$$

Exercice 4 (★★☆☆) Intégrales et fonction tangente

Calculer les intégrales

1. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x) dx.$

$$2. J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x} \right) dx.$$

$$3. K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx.$$

Exercice 5 (★★★★☆) Changement de variable affine

Soit F une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I . Nous désignons par g la fonction affine définie sur $[a, b]$ par $t \mapsto \alpha t + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Nous supposons que

$$\forall t \in [a, b], \quad \alpha t + \beta \in I.$$

1. Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\alpha} F(g(t))$ est une primitive sur $[a, b]$ de $t \mapsto f(g(t))$.

2. En déduire l'égalité de « changement de variable affine »

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta) \, dt = \frac{1}{\alpha} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

3. *Un exemple pratique.* Soit un entier $n \geq 1$.

Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(2t-1)^n} \, dt.$$

Exercice 6 (★★★★☆) Parité et changement de variable

Nous utilisons dans cet exercice la méthode du changement de variable exposée lors de l'exercice précédent.

Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$, avec $a > 0$.

1. a) Montrer que si f est paire, alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

b) *Application.* Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 \frac{|t|}{t^2 + 1} \, dt.$$

2. a) Montrer que si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

b) *Application.* Calculer l'intégrale

$$J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x + 1} \, dx.$$

Exercice 7 (★★★★☆) Intégrale et équation différentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

1. Justifier que f est une solution de l'équation différentielle

$$2y' - 1 = (y - x)^2.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x} \right)^2 dx.$$

Exercice 8 (★★★★☆) Aires égales

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = 4x - x^3$.

Nous considérons la droite (d_a) d'équation $y = ax$, avec $a > 0$.

Déterminer pour quelle valeur du réel $a > 0$, la droite (d_a) partage l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ en deux parties d'aires égales.

Fonction définie par une intégrale

Exercice 9 (★★★★☆) Fonction $x \mapsto e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

On considère les fonctions u et f définies sur $[1, +\infty[$ par

$$u(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \quad \text{et} \quad f(x) = e^{-x} u(x).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $[1, +\infty[$.

2. Prouver que, pour tout réel $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - f(x).$$

3. En déduire que, pour tout réel $a \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^a f(x) dx = \ln a - f(a).$$

4. En utilisant la méthode des rectangles, déterminer un encadrement de l'intégrale

$$\int_1^2 f(x) dx.$$

Exercice 10 (★★★★☆) Primitives et composition

1. Soient f une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

Quelle est la dérivée sur $]0, +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$?

2. Pour tout réel $x > 0$, nous posons

$$\varphi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) = 0$.

Exercice 11 (★★★★☆) Une équation fonctionnelle

Nous considérons les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfont, pour tout réel x , à l'équation fonctionnelle (1)

$$f(x) + \int_0^x f(t) dt = x. \quad (1)$$

1. Justifier que si f est une solution de (1), alors cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$y' = -y + 1, \text{ avec la condition initiale } f(0) = 0.$$

2. En déduire que l'équation (1) admet une unique solution.
-

Exercice 12 (★★★★) Fonction arcsin

Soit la fonction F définie sur $] -1, 1[$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

1.
 - a) Quel est le sens de variation de F sur l'intervalle $] -1, 1[$?
 - b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_F$ à l'origine O du repère choisi.
 - c) La courbe $\mathcal{C}_F$ admet-elle un point d'inflexion ?
 - d) Quelle est la parité de la fonction F ?
2. En utilisant la méthode d'Euler décrite dans l'exercice 5 du TD 14, donner une allure de la courbe $\mathcal{C}_F$ lorsque $x \in [0, 1[$.
3. Nous considérons à présent la fonction G définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$G(x) = F(\sin x).$$

- a) Justifier que

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad G(x) = x.$$

- b) En déduire le calcul de l'intégrale

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Intégrales et inégalités

Exercice 13 (★★☆☆) Une bijection

1. Quel est le sens de variation sur $[1, +\infty[$ de la fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$?
2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement

$$\frac{e^n}{n} \leq \int_n^{n+1} \frac{e^t}{t} dt \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}.$$

3. Justifier que l'équation $\frac{e^x}{x} = \int_n^{n+1} \frac{e^t}{t} dt$ admet une seule solution u_n dans l'intervalle $[n, n+1]$.
 4. Quelle est la limite de $\frac{u_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$?
-

Exercice 14 (★★★★☆) Encadrement d'une intégrale

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [e, +\infty[$,

$$1 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}.$$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale

$$I = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{\ln x}} dx.$$

3. Comparer une valeur approchée par défaut de cet encadrement avec celles qui sont fournies par la méthode des rectangles.
-

Exercice 15 (★★★☆☆) Intégrale et fonction nulle

1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$.

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$,

(ii) $\int_a^b f(x) dx = 0$.

2. Une application. Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Nous supposons qu'il existe un réel k tel que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt.$$

- a) Quel est le sens de variation sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction

$$g : x \mapsto e^{-kx} \int_0^x f(t) dt ?$$

- b) En déduire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 0.$$

Exercice 16 (★★★☆☆) Inégalité des accroissements finis

Cette inégalité a déjà été démontrée. Nous proposons d'en donner une autre preuve en utilisant le calcul intégral.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Nous supposons qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+$ telle que,

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

En remarquant que, quels que soient les réels a et b appartenant à I , nous avons

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx,$$

justifier que

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Exercice 17 (★★★★) Inégalité de Cauchy–Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

1. En supposant que $a < b$, nous considérons le trinôme du second degré

$$P : \lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 dt.$$

En posant

$$A = \int_a^b f^2(t) dt, \quad B = \int_a^b f(t)g(t) dt \quad \text{et} \quad C = \int_a^b g^2(t) dt,$$

et en supposant que $A \neq 0$, prouver l'inégalité

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \times \int_a^b g^2(t) dt.$$

2. Justifier que l'inégalité de Cauchy–Schwarz est vraie, quels que soient les réels a et b .
3. Examiner le cas où $A = 0$.
Dans quels cas l'égalité est-elle atteinte ?
4. *Une application.* Justifier que

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^7} dx \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Comparer ce majorant avec celui qui est fourni par la méthode des rectangles.

Suites et intégrales

Exercice 18 (★★☆☆) Intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt.$$

1.
 - a) Calculer u_0 et u_1 .
 - b) Pour tout entier naturel n , quel est le signe de u_n ?
 - c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
2.
 - a) Justifier que, pour tout entier naturel n et pour tout réel $t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}.$$

b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ln 2.$$

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

3.
 - a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 19 (★★★★☆) Une suite définie par une intégrale

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{1-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \int_0^1 f(x) e^{\frac{x}{n}} dx.$$

- a) Quel est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de u_n ?
 - b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 - c) Cette suite est-elle convergente ?
3.
 - a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I \leq u_n \leq e^{\frac{1}{n}} I.$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

- c) Proposer un algorithme qui restitue un rang N à partir duquel le réel u_N est proche de I à 10^{-P} près.

Exercice 20 (★★★★☆) Une suite définie par une somme

1. Quel est le sens de variation sur l'intervalle $]1, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x} ?$$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, nous posons

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

Justifier que, pour tout entier naturel $k \geq 3$,

$$\frac{1}{k \ln k} \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \frac{1}{(k-1) \ln(k-1)}.$$

3. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$S_n - \frac{1}{2 \ln 2} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln n}.$$

4. Établir que, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Quelle est la limite de la suite (S_n) quand n tend vers $+\infty$?

5. Quelle est la limite de $\frac{S_n}{\ln(\ln n)}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

Exercice 21 (★★★★) Une approximation de π

Nous considérons deux suites (I_n) et (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx \quad \text{et} \quad u_n = I_n + I_{n+1}.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{2n+1}$.

3. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq u_n.$$

En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

4. Pour tout entier naturel n , nous posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$

Établir que, pour tout entier naturel n ,

$$S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

5. En déduire

$$|4S_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3}.$$

6. Quelle est la limite de la suite $(4S_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
 7. Proposer un algorithme qui restitue un entier N tel que $4S_N$ soit une valeur approchée de π à 10^{-P} près.
-

Exercice 22 (★★★★) Série harmonique — Constante d'Euler

Soit la suite (h_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} + \ln n \leq h_n \leq 1 + \ln n.$$

3. La suite (h_n) converge-t-elle ?
4. Pour tout entier $n \geq 1$, nous posons $u_n = h_n - \ln n$.
Prouver que, quel que soit l'entier $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

5. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
 6. En déduire que cette suite est convergente.
-

Suites et intégration par parties

Exercice 23 (★★★★☆) Suite récurrente, intégration et fonction $\ln$

Nous considérons la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

1. Calculer I_1 .
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n.$$

3. Proposer un programme Python qui restitue une approximation de I_n pour chaque valeur de n choisie par l'utilisateur.
-

Exercice 24 (★★★★) Une formule de Taylor

Pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier naturel n , nous posons

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

1. Calculer $I_0(x)$.

2. Prouver que, quel que soit l'entier naturel n ,

$$I_{n+1}(x) = -I_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En déduire $I_1(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

4. Pour tout entier naturel non nul, nous posons

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Montrer, en prenant toutes les initiatives, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ln 2.$$

5. Proposer un algorithme qui restitue un entier N tel que s_N soit une valeur approchée de $\ln 2$ à ε près.

Exercice 25 (★★★★) Intégrales de Wallis

Nous considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

1.
 - a) Calculer u_0 et u_1 .
 - b) Pour tout entier naturel n , quel est le signe de u_n ?
 - c) Justifier que la suite (u_n) est décroissante.
 - d) Cette suite converge-t-elle ?
2. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n ,

$$u_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \sin^2(t) dt.$$

En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n.$$

3. Prouver que, pour tout entier n ,

$$0 \leq \frac{n+1}{n+2} u_n \leq u_{n+1} \leq u_n,$$

puis que $u_n > 0$.

4. Établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

5. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+1)u_n u_{n+1}$.

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n ,

$$v_n = \frac{\pi}{2}.$$

Prouver que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \text{ c'est-à-dire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$$

Calculs approchés d'une intégrale

Exercice 26 (★★★☆☆) Méthode des trapèzes

Nous reprenons les données et les conclusions de la méthode des rectangles.

Soit $[a, b]$ un intervalle avec $a < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons une subdivision de $[a, b]$, de pas $h = \frac{b-a}{n}$, qui est une suite finie de réels (x_k) définie par

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n} = a + kh.$$

Étant donnée une fonction f continue, monotone et positive sur $[a, b]$, avec $a < b$.

En posant $I = \int_a^b f(x) dx$, nous savons que les suites (S_n) et (S'_n) , définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}),$$

satisfont à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = I.$$

1. Nous supposons que f est croissante sur $[a, b]$. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, nous considérons le trapèze de bases $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$, de hauteur $h = \frac{b-a}{n}$.

Justifier que la somme T_n des aires de ces trapèzes lorsque l'entier k varie de 0 à $n-1$ est

$$T_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) = \frac{S_n + S'_n}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = I$.

2. Vérifier que, pour tout entier n non nul,

$$T_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right).$$

3. Proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée de l'intégrale I .
4. En déduire une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$ et comparer le résultat avec ceux qui ont été obtenus par la méthode des rectangles.
5. Montrer que, pour tout entier n non nul,

$$|T_n - I| \leq \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)).$$

6. En déduire un algorithme qui restitue un seuil N à partir duquel T_N est une valeur approchée de I à 10^{-P} près.

Implémenter cet algorithme avec $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$.

Exercice 27 (★★★☆☆) Majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles

Nous rappelons l'inégalité des accroissements finis. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. S'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+$ telle que,

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leq k,$$

alors, pour tous les réels u et v appartenant à l'intervalle $[a, b]$,

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|.$$

Nous supposons que f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ qui satisfait à l'inégalité des accroissements finis. Les données sont celles de l'exercice précédent, avec $a < b$.

1. Justifier que, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(x_{k+1} - x_k)f(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t)) dt.$$

2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|S_n - I| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)| dt.$$

3. En déduire

$$|S_n - I| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k) dt.$$

4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n - I| \leq \frac{k(b-a)^2}{2n}.$$
