



TD 16 Calcul vectoriel dans l'espace

Calculs dans l'espace vectoriel $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$

Exercice 1 (★★☆☆) Simplification et addition vectorielle

1. *Simplification.*

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Montrer l'équivalence suivante

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \iff \vec{u} = \vec{v}.$$

2. *Une équation.*

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs donnés. Résoudre l'équation $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$.

3. *Unicité de l'opposé.*

Montrer que l'opposé d'un vecteur est unique.

Exercice 2 (★★☆☆) Multiplication par un réel et opposé d'un vecteur

Soient a et b deux réels, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Montrer que nous disposons des propriétés suivantes

1. $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$,
2. $(-a) \cdot \vec{u} = a \cdot (-\vec{u}) = -(a \cdot \vec{u})$,
3. $(a - b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{u}$,
4. $a \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = a \cdot \vec{u} - a \cdot \vec{v}$.

Exercice 3 (★★★★) Nullité du produit d'un réel par un vecteur

Soient $\vec{u}$ un vecteur et a un réel. Justifier l'équivalence suivante

$$a \cdot \vec{u} = \vec{0} \iff a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}.$$

Exercice 4 (★★☆☆) Simplification et multiplication par un réel

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul, a et b deux réels. Prouver l'équivalence suivante

$$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{u} \iff a = b.$$

Alignement — Coplanarité

Exercice 5 (★★★★☆) Tétraèdre et alignement

Soit un tétraèdre $ABCD$. Nous désignons par

- I le milieu du segment $[CD]$,
- J le milieu du segment $[AC]$,
- G le centre de gravité du triangle ABC ,
- E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.

Que peut-on dire des points I , G et E ?

Exercice 6 (★★★★☆) Cube et alignement

Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O . En désignant par K le centre de gravité du triangle BDE , montrer que les points A , K , O et G sont alignés.

Exercice 7 (★★★★☆) Vecteurs coplanaires

Dans un cube $ABCDEFGH$, nous considérons un point M tel que

$$\overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BC}, \text{ avec } 0 < k < 1.$$

Pour quelle valeur du réel k , les vecteurs $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 8 (★★★★) Bases de $\vec{\mathcal{E}}$

Relativement à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{\mathcal{E}}$, nous donnons les vecteurs

$$\vec{u}(1, -1, 2), \vec{v}(3, 2, 1) \text{ et } \vec{w}(a, b, c), \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si

$$9a - b - 5c = 0.$$

2. Nous supposons que $\vec{w}(0, 1, 1)$.

- a) Justifier que le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$.
 - b) On donne le vecteur $\vec{h}(1, 2, 3)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{h}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?
-

Barycentres

Exercice 9 (★★★☆☆) Fonction vectorielle de Leibniz

1^{er} cas : deux points pondérés.

La fonction vectorielle de Leibniz associée à deux points pondérés (A, α) et (B, β) est définie par

$$f : M \mapsto \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}.$$

Cette fonction est définie dans le plan ou dans l'espace et est à valeurs dans l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan ou dans l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des vecteurs de l'espace.

1. Nous supposons que $\alpha + \beta = 0$. Montrer que, quel que soit le point M appartenant au plan ou à l'espace, $f(M)$ est un vecteur constant.
2. Nous supposons que $\alpha + \beta \neq 0$. Justifier que $\vec{0}$ admet pour unique antécédent par f le barycentre G des points pondérés (A, α) et (B, β) .

En déduire que f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, respectivement de $\mathcal{P}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, c'est-à-dire : *pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $f(M) = \vec{u}$.*

2^e cas : trois points pondérés.

La fonction vectorielle de Leibniz associée à trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) est définie par

$$f : M \mapsto \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}.$$

3. Nous supposons que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Montrer que, quel que soit le point M appartenant au plan ou à l'espace, le vecteur $f(M)$ est constant.
4. Nous supposons que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Prouver que f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, respectivement de $\mathcal{P}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Exercice 10 (★★★★) Fonction vectorielle de Leibniz : cas général

Soit un entier naturel $n \geq 2$. La fonction vectorielle f de Leibniz, relative aux n points pondérés

$$(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n),$$

associe à chaque point M du plan ou de l'espace le vecteur $f(M)$ défini par

$$f(M) = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k}.$$

1. Soit O un point fixé. Justifier que, pour tout point M ,

$$f(M) = f(O) + m \overrightarrow{MO}, \text{ avec } m = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

2. On suppose que $m = 0$. Justifier que, pour tout point M appartenant au plan ou à l'espace, le vecteur $f(M)$ est constant.
3. On suppose que $m \neq 0$.
 - a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $f(G) = \vec{0}$.
Par définition, cet unique point G est le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$.
 - b) Justifier que, pour tout point M appartenant au plan ou à l'espace,

$$f(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = m \overrightarrow{MG}.$$

- c) En déduire que f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, respectivement de $\mathcal{P}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, c'est-à-dire : *pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $f(M) = \vec{u}$.*

Exercice 11 (★★★☆☆) Associativité du barycentre

Soient un entier naturel $n \geq 3$ et G le barycentre des points pondérés

$$(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n).$$

En réindexant éventuellement ces n points pondérés, nous considérons

- un entier r tel que $2 \leq r < n$ satisfaisant à $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r \neq 0$,
- le barycentre H des points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_r, \alpha_r)$.

Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que G est aussi le barycentre des points pondérés

$$\left(H, \sum_{k=1}^r \alpha_k\right), (A_{r+1}, \alpha_{r+1}), \dots, (A_n, \alpha_n).$$

Exercice 12 (★★★☆☆) Centre de gravité d'un tétraèdre

Dans un tétraèdre, une *médiane* joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.

On désigne par O l'isobarycentre d'un tétraèdre $ABCD$.

Démontrer que ce point est le point de concours des quatre médianes de ce tétraèdre.

Exercice 13 (★★★☆☆) Cévianes¹ dans un triangle

Dans un triangle ABC du plan ou de l'espace, nous désignons par M le barycentre des points pondérés

$$(A, 1), (B, n), (C, p), \text{ où } n \text{ et } p \text{ sont deux entiers naturels non nuls.}$$

1. Montrer que les droites (AM) et (BC) se coupent en un point I qui est le barycentre des points pondérés $(B, n), (C, p)$.
 2. Que peut-on dire du point d'intersection
 - a) des droites (BM) et (AC) ?
 - b) des droites (CM) et (AB) ?
-

Exercice 14 (★★★★) Droites concourantes dans un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On considère les points E, F, R et S tels que

$$\overrightarrow{AE} = k \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = k \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CR} = k \overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{CS} = k \overrightarrow{CD}, \text{ avec } k \in]0, 1[.$$

1. Exprimer E comme un barycentre des points A et B . Faire de même avec les points F, R et S .
 2. Les points I et J étant les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$, montrer que les droites $(ES), (FR)$ et (IJ) sont concourantes en un point G que l'on précisera.
 3. Justifier que $\overrightarrow{IG} = k \overrightarrow{IJ}$.
-

Exercice 15 (★★★★) Une suite de points

Dans l'espace rapporté à un repère d'origine O , nous donnons deux points M_0 et M_1 et nous considérons la suite de points (M_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$\overrightarrow{OM}_{n+2} = \overrightarrow{OM}_{n+1} - \frac{1}{4} \overrightarrow{OM}_n.$$

1. Soit G_{n+1} le barycentre des points pondérés $(M_{n+1}, 2)$ et $(M_n, -1)$.
Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , les points O, G_{n+2} et G_{n+1} sont alignés.
Nous supposons que $M_0(2, 0, 0)$ et $M_1(1, 1, 0)$.
Placer ces points ainsi que G_1, G_2 et M_2 sur une figure.

1. Une *cévienne* d'un triangle est un segment de droite partant d'un sommet et joignant son côté opposé.

2. Nous posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n(x_n, y_n, z_n)$.
 - a) Déterminer x_{n+2} en fonction de x_{n+1} et x_n , ainsi que y_{n+2} en fonction de y_{n+1} et y_n .
 - b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$.
 3. Pour tout entier naturel n , nous posons $u_n = 2^n x_n$ et $v_n = 2^n y_n$.
 - a) Que peut-on dire des suites (d_n) et (δ_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$d_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \delta_n = v_{n+1} - v_n?$$
 - b) En déduire x_n et y_n en fonction de n .
 4. Proposer un programme Python qui restitue les points (M_n) lorsque n est choisi assez grand par l'utilisateur.
Que remarquez-vous?
 5. Justifier que les points M_n occupent une position limite quand n tend vers $+\infty$.
-