



TD 17 Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité

Exercice 1 (★★★☆☆) Relation d'Euler

1. Soient A , B et C trois points non alignés de l'espace.

Justifier que, pour tout point M de l'espace,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \quad (\text{relation d'Euler})$$

2. *Applications.*

- a) Montrer que dans un tétraèdre, si deux couples d'arêtes opposées sont orthogonales, alors il en est de même du troisième couple d'arêtes opposées.
b) Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Justifier que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à Γ .

Montrer que Γ est la droite perpendiculaire en H au plan (ABC) .

Exercice 2 (★★☆☆☆) Orthogonalité dans un cube — Calculs d'angles

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête a , on considère un point $M \in [BF]$ tel que

$$\overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BF}, \text{ avec } k \in [0,1].$$

1. Existe-t-il une valeur du réel k pour laquelle les droites (ME) et (MG) sont orthogonales ?
2. Nous supposons que $M = B$. Quelle est la mesure en degré de l'angle $\widehat{EBG}$?
3. Nous supposons que M est le milieu de $[BF]$. Déterminer dans ce cas une valeur approchée en degré de la mesure de l'angle $\widehat{EMG}$.

Exercice 3 (★★☆☆☆) Produit scalaire et barycentres

Étant donnés deux points distincts A et B de l'espace et un réel $k > 0$, nous considérons l'ensemble S_k des points M de l'espace tels que

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

1. Justifier que S_1 est le plan médiateur du segment $[AB]$.
2. Nous supposons à présent que $k \neq 1$.

- a) Montrer que, pour tout point M de l'espace,

$$M \in S_k \iff (\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB}) = 0.$$

b) Relativement aux points A et B , justifier l'existence de deux barycentres G et G' tels que

$$M \in \mathcal{S}_k \iff \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG'} = 0.$$

c) En déduire la nature de $\mathcal{S}_k$.

Exercice 4 (★★★☆☆) Projection vectorielle

Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur de l'espace. On appelle *projection orthogonale sur ce vecteur* la fonction notée $p_{\vec{u}}$ qui associe à chaque vecteur $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ un unique vecteur $\vec{v}' \in \vec{\mathcal{E}}$ tel que

$$\vec{v}' = p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

1. Soit $\vec{v}(x, y, z)$ relativement à une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Déterminer la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{i}$.
Déterminer de même $p_{\vec{j}}(\vec{v})$ et $p_{\vec{k}}(\vec{v})$.
2. Action d'une projection orthogonale sur une combinaison linéaire de deux vecteurs.
Justifier que, pour tous les vecteurs $\vec{v}, \vec{w}$ et pour tous les réels α, β ,

$$p_{\vec{u}}(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha p_{\vec{u}}(\vec{v}) + \beta p_{\vec{u}}(\vec{w}).$$

3. Vecteurs invariants par $p_{\vec{u}}$.
Déterminer $p_{\vec{u}}(\vec{u})$.
En déduire qu'un vecteur $\vec{v}$ est invariant par $p_{\vec{u}}$, c'est-à-dire $p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v}$, si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
4. Déterminer $p_{\vec{u}}(\vec{0})$.
Montrer que, pour tout vecteur $\vec{v}$, l'égalité $p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{0}$ est réalisée si et seulement si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Exercice 5 (★★★★) Construire une base orthonormale

Cet exercice utilise des résultats de l'exercice précédent.

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base quelconque de $\vec{\mathcal{E}}$.

À partir de ces trois vecteurs non coplanaires, nous proposons une méthode de construction d'une base $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ orthonormale.

1. On pose $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$. Quelle est la norme de ce vecteur ?
2. Soit $p_{\vec{u}_1}(\vec{v})$ la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur $\vec{u}_1$.
a) Justifier que le vecteur $\vec{v}' = \vec{v} - p_{\vec{u}_1}(\vec{v})$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}_1$.
b) On pose $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}'$.
Quelle est la norme de ce vecteur ? Vérifier que $\vec{v}_1$ est orthogonal à $\vec{u}_1$.
3. On pose $\vec{w}' = \vec{w} - p_{\vec{u}_1}(\vec{w}) - p_{\vec{v}_1}(\vec{w})$.
a) Montrer que $\vec{w}' \neq \vec{0}$.
b) Justifier que ce vecteur est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$.
c) En déduire un vecteur $\vec{w}_1$ qui est unitaire et orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$.
4. Conclure.

Exercice 6 (★★☆☆☆) Perpendiculaire commune dans un cube

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, nous désignons par

- K le centre de gravité du triangle BFE ,
- L le centre de gravité du triangle BFC .

1. a) Montrer que $3\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FE}$.
 b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{BG}$.
 Conclure.
 2. En choisissant un repère orthonormal adapté, donner une autre preuve que la droite (KL) est perpendiculaire aux droites (AF) et (BG) .
-

Exercice 7 (★★★☆☆) Projection d'un angle droit

Soit ABC un triangle rectangle en B et A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B et C sur un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal unitaire $\vec{n}$.

1. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{B'A'} - \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{BC}$ sont colinéaires au vecteur $\vec{n}$.
2. En déduire les deux égalités suivantes

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{BA} - (\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n})\vec{n}, \quad \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

3. Prouver que le triangle $A'B'C'$ est rectangle en B' si et seulement si la droite (BA) ou la droite (BC) est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
-

Exercice 8 (★★★★) Tétraèdre régulier

Nous proposons dans cet exercice de justifier quelques propriétés dans un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont les quatre faces sont équilatérales.

1. Démontrer que dans un tel tétraèdre les arêtes opposées sont orthogonales.
 2. Dans un tétraèdre, nous rappelons qu'une médiane joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.
 Prouver que lorsque le tétraèdre est régulier, une médiane est également une hauteur, c'est-à-dire une droite passant par un sommet et orthogonale à la face opposée.
 3. Dans un tétraèdre, une *bimédiane* est une droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées.
 Prouver que lorsque le tétraèdre est régulier, une bimédiane est orthogonale aux arêtes qu'elle joint.
 4. Établir que l'isobarycentre O d'un tétraèdre régulier, c'est-à-dire le point de concours des médianes, est le centre de la sphère circonscrite à ce dernier.
-

Exercice 9 (★★★★☆) Tétraèdre trirectangle

Nous considérons un tétraèdre $OABC$ tel que ses arêtes (OA) , (OB) et (OC) sont perpendiculaires deux à deux en O .

1. Montrer que les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales.
2. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) .
 a) Justifier que H est l'orthocentre du triangle ABC .
 b) En déduire que la droite (AB) est orthogonale au plan (OCH) .
 c) En désignant par K le pied de la hauteur issue de C sur (AB) , montrer que la droite (OK) est orthogonale à (AB) .
3. En utilisant le triangle AOB puis le triangle OKC , prouver l'égalité

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Exercice 10 (★★★★) Point de Monge d'un tétraèdre orthocentrique

Soit un tétraèdre $ABCD$. Nous désignons par

- G son centre de gravité,
- O le centre de sa sphère circonscrite,

- I le milieu du segment $[AB]$.

Le point de Monge¹ de ce tétraèdre est le point M_0 défini par

$$\overrightarrow{OM_0} = 2\overrightarrow{OG}.$$

1. a) Justifier que

$$\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B} + \overrightarrow{M_0C} + \overrightarrow{M_0D} = 2\overrightarrow{M_0O}.$$

- b) En déduire que

$$2\overrightarrow{M_0I} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}.$$

2. Prouver que le point M_0 appartient au plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{CD}$.
3. On rappelle qu'une *hauteur* d'un tétraèdre est une droite passant par un des quatre sommets et qui est orthogonale au plan de la face opposée. Un tétraèdre est dit *orthocentrique* si et seulement si ses quatre hauteurs sont concourantes en un point H nommé par extension *orthocentre* du tétraèdre.
 - a) Montrer que si le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique, alors les couples d'arêtes opposées sont orthogonales.
 - b) Réciproquement, démontrer que si les couples d'arêtes opposées sont orthogonales, alors le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique, d'orthocentre son point de Monge.

Fonction scalaire de Leibniz

Exercice 11 (★★★☆☆) Fonction scalaire de Leibniz associée à deux points

La fonction scalaire de Leibniz associée à deux points pondérés (A, α) et (B, β) est définie par

$$g : M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2.$$

Cette fonction est définie dans le plan ou dans l'espace et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Nous supposons que $\alpha + \beta \neq 0$.
 - a) En désignant par G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) , montrer que pour tout point M de l'espace ou du plan,

$$g(M) = (\alpha + \beta)MG^2 + g(G).$$

- b) En déduire que la fonction g atteint un extremum que l'on précisera.
2. Nous supposons que $\alpha + \beta = 0$.
 - a) Si $\alpha = 0$, que peut-on dire de la fonction g ?
 - b) Si $\alpha \neq 0$, justifier que, pour tout point M de l'espace,

$$g(M) = 2\alpha \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB},$$

où I désigne le milieu du segment $[AB]$.

- c) En déduire l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction g .

Exercice 12 (★★★☆☆) Fonction scalaire de Leibniz associée à trois points

La fonction scalaire de Leibniz associée à trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) est définie par

$$g : M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2.$$

Cette fonction est définie dans le plan ou dans l'espace et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Le point O étant donné dans l'espace ou le plan, justifier que, pour tout point M ,

$$g(M) = g(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}) + (\alpha + \beta + \gamma)OM^2.$$

1. Mathématicien français : 1746–1818.

2. Nous supposons que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

- a) Le point G étant le barycentre des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) , établir que, pour tout point M de l'espace ou du plan,

$$g(M) = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + g(G).$$

- b) *Application.* Nous supposons que le triangle ABC est équilatéral de côté $a > 0$. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2 ?$$

3. Nous supposons que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Justifier que, quel que soit le point M du plan ou de l'espace,

$$g(M) = g(O) + 2 \overrightarrow{MO} \cdot \vec{v},$$

où $\vec{v}$ est un vecteur constant que l'on précisera.

Exercice 13 (★★★★) Fonction scalaire de Leibniz : cas général

Soit un entier naturel $n \geq 2$.

La fonction scalaire g de Leibniz, relative aux n points pondérés

$$(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n),$$

associe à chaque point M du plan ou de l'espace le réel $g(M)$ défini par

$$g(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k MA_k^2.$$

1. Soit O un point fixé. Justifier que, pour tout point M du plan ou de l'espace,

$$g(M) = g(O) + 2 \overrightarrow{MO} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{OA_k} \right) + m MO^2, \text{ avec } m = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

2. Nous supposons que le réel $m \neq 0$.

Le point G étant le barycentre des points pondérés (A_1, α_1) , (A_2, α_2) , ..., (A_n, α_n) , établir que, pour tout point M du plan ou de l'espace,

$$g(M) = g(G) + m \times MG^2.$$

3. Nous supposons que le réel $m = 0$.

Justifier que, quel que soit le point M du plan ou de l'espace,

$$g(M) = g(O) + 2 \overrightarrow{MO} \cdot \vec{v},$$

où $\vec{v}$ est un vecteur constant que l'on précisera.

Exercice 14 (★★★★) Lignes de niveau de la fonction scalaire de Leibniz

Les données sont celles de l'exercice précédent.

Le réel λ étant donné, nous désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $g(M) = \lambda$.

Déterminer la nature de cet ensemble selon que le réel $m = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ est nul ou non nul.