



TD 18 Géométrie analytique dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Droites de l'espace

Exercice 1 (★★☆☆) Intersection d'une droite avec les plans de coordonnées

Nous donnons les points $A(3, -5, 2)$ et $B(1, -1, 3)$.

Déterminer les points d'intersection de la droite (AB) avec les plans de coordonnées.

Exercice 2 (★★☆☆) Droites de l'espace et barycentre

Soient $A(1, -2, 2)$, $B(1, 1, -1)$ et (d) la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = -2t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

À chaque point M de la droite (d) est associé le barycentre G des points pondérés

$$(M, 2), (A, 1) \text{ et } (B, 1).$$

Quel est l'ensemble décrit par le point G lorsque M décrit la droite (d) ?

Exercice 3 (★★★★☆) Projection orthogonale sur une droite

Soit (d) une droite de l'espace passant par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ unitaire, c'est-à-dire tel que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1.$$

À chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace nous associons le point $H(x', y', z')$ qui est le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) .

Définir analytiquement cette projection, c'est-à-dire exprimer les réels x' , y' et z' en fonction de x , y et z .

Exercice 4 (★★★★) Points équidistants de deux droites

Nous considérons deux droites de l'espace

▷ la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(0, 0, 1)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 0)$,

▷ la droite $\mathcal{D}'$ passant par le point $B(0, 0, -1)$, de vecteur directeur $\vec{u}'(1, -1, 0)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de chacune de ces deux droites.

Justifier qu'elles sont orthogonales. Sont-elles coplanaires ?

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

a) Nous désignons par H son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$.

Montrer que la distance de ce point à la droite $\mathcal{D}$ est

$$d(M, \mathcal{D}) = MH = \sqrt{\frac{(x-y)^2}{2} + (1-z)^2}.$$

- b) Calculer de la même façon la distance $d(M, \mathcal{D}') = MH'$, où H' est le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}'$.
3. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Prouver que $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si

$$xy + 2z = 0.$$

4. Quelle est l'intersection de $\mathcal{H}$ avec le plan de coordonnées (xOy) ?
Quelle est l'intersection de $\mathcal{H}$ avec un plan strictement parallèle au plan (xOy) ?
-

Plans de l'espace

Exercice 5 (★★★☆☆) Vecteur normal et produit vectoriel

Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace, nous considérons deux vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Le *produit vectoriel* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ dont les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont

$$\begin{pmatrix} bc' - b'c \\ a'c - ac' \\ ab' - a'b \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
 - Application : équation d'un plan passant par trois points non alignés.*
Les points $A(-1, -2, 2)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(-2, 0, 4)$ sont donnés.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{0}$.
 - Proposer un algorithme en Python qui restitue les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs, les coordonnées de ces deux derniers étant données en entrée.
-

Exercice 6 (★★★☆☆) Orthogonalité dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. On désigne par

- I le milieu du segment $[BF]$,
 - J le milieu du segment $[HD]$,
 - M un point appartenant à la face $EFGH$,
 - L le point d'intersection de la droite (AM) avec le plan (EIJ) .
- En choisissant un repère orthonormal adapté, où placer le point M afin que la droite (AM) soit orthogonale au plan (EIJ) ?
 - Dans ce cas, quelles sont les coordonnées du point L ?
Que peut-on dire de ce point relativement au triangle EIJ ?
-

Exercice 7 (★★★★) Projection et symétrie orthogonales par rapport à un plan

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous considérons le plan $\mathcal{P}$ d'équation

$$x + 2y - z = 0.$$

Pour tout point $M(x, y, z)$, nous désignons par

- $H(x_H, y_H, z_H)$ le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$,
 - $M'(x', y', z')$ le point satisfaisant à $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$.
1. Justifier que M' est le symétrique de M par rapport au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que H est le milieu du segment $[MM']$ et que la droite (MM') est orthogonale à $\mathcal{P}$.
 2. Déterminer les coordonnées du point H en fonction de x, y et z .
En déduire la définition analytique de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire exprimer les coordonnées du point M' en fonction de x, y et z .
 3. Proposer un algorithme en Python qui restitue les coordonnées des points H et M' , un point M de l'espace étant choisi par l'utilisateur.

Exercice 8 (★★★★☆) Points équidistants de deux plans

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, nous considérons deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dont les équations sont respectivement

$$x - y + 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - y - z = 0.$$

1. Ces deux plans sont-ils perpendiculaires ?
2. Déterminer leur intersection (δ) .
3. Nous considérons le point $B(b, b, b)$, avec $b \in \mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs du réel b a-t-on $d(B, \mathcal{P}_1) = d(B, \mathcal{P}_2)$?
4. Pour la valeur du réel $b > 1$ déterminée à la question précédente, calculer la distance de B à la droite (δ) .

Exercice 9 (★★★★) Perpendiculaire commune

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, nous considérons deux droites

- (d) passant par le point $A(1, -1, 0)$, de vecteur directeur $\vec{u}(3, 1, 0)$,
- (d') passant par le point $A'(-2, 1, -1)$, de vecteur directeur $\vec{u}'(0, 1, 2)$.

1. Justifier que ces deux droites sont non coplanaires.
2. Déterminer un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ qui est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
3. Établir une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ de repère $(A; \vec{u}, \vec{n})$.
Calculer les coordonnées du point H' d'intersection de la droite (d') avec ce plan.
4. Soit (δ) la droite passant par H' , de vecteur directeur $\vec{n}$.
Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de cette droite avec la droite (d) .
Vérifier que (δ) est la perpendiculaire commune à (d) et (d') et calculer la distance HH' entre ces deux droites.

Sphère

Exercice 10 (★★☆☆) Sphère et barycentre

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous considérons les points

$$A(4, 0, 0), B(0, 2, 0) \text{ et } C(0, 0, 2),$$

ainsi que G le barycentre des points pondérés $(O, 1)$, $(A, 3)$ et $(B, -2)$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de l'espace tels que

$$(\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$$

En donner une équation cartésienne.

2. Quelle est l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan (xOy) ?
 3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent à $\mathcal{S}$ au point C .
-

Exercice 11 (★★★★) Tangentes à une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous considérons la sphère $\mathcal{S}$ de centre $I(1,0,0)$ et de rayon 1.

1. Donner une équation cartésienne de cette sphère.
 2. Soient deux points de l'espace $A(0,0,a)$ et $B(2,b,0)$, où a et b sont deux réels non nuls.
 - a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
 - b) Déterminer, selon les valeurs des réels a et b , le nombre de points d'intersection de cette droite avec la sphère $\mathcal{S}$.
 3. Lorsque (AB) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$, déterminer en fonction de a et b les coordonnées du point de contact.
-

Exercice 12 (★★★★) Sphère circonscrite à un tétraèdre régulier

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal d'origine O , on donne les points

$$A(a,0,0), B(0,a,0) \text{ et } C(0,0,a), \text{ où } a \text{ est un réel strictement positif.}$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
 2. Calculer, en fonction du réel $a > 0$, les coordonnées du projeté orthogonal H du point O sur le plan (ABC) .

Justifier que H est le centre de gravité du triangle ABC .
 3. Soit D le symétrique du point H par rapport à O .
 - a) Prouver que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.
 - b) Prouver que le centre de gravité G de ce tétraèdre est le centre de sa sphère circonscrite.
 - c) Donner une équation cartésienne de cette sphère.
-