



TD 19 Probabilités

Loi binomiale

Exercice 1 (★★☆☆) Seuil

Une entreprise vend des boîtes contenant 200 vis en inox.
Une étude statistique a conclu que 2 % des vis produites sont défectueuses.
Une boîte est choisie au hasard et on désigne par X la variable aléatoire qui restitue le nombre de vis défectueuses.

1. Quelle est la loi de X ?
Donner les probabilités des événements $(X = 0)$, $(X = 1)$.
Quelle est la probabilité pour qu'une boîte ait au moins deux vis défectueuses ?
2. Dans cette question, une boîte contient n vis.
Quel est le plus petit entier n de vis à mettre dans une boîte pour que la probabilité d'obtenir au moins une vis défectueuse dépasse 0,999 ?
3. Proposer un programme en Python qui détermine le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 1 - s$, où $s \in]0,1[$ est choisi par l'utilisateur.

Exercice 2 (★★☆☆) D'après BAC 2019 : transmission d'information

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelée un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet. Un octet est envoyé au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité que exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ?

Exercice 3 (★★☆☆) D'après BAC 2013 : probabilités totales et loi binomiale

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 .

Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

▷ H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,

- ▷ H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- ▷ H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- ▷ C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- ▷ F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

- a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- b) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

2. On choisit au hasard un échantillon de 20 arbres dans le stock de cette jardinerie.

On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 20 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

- a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 10 conifères ? On arrondira à 10^{-3} .
- c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3} .
- d) En utilisant l'algorithme donné dans l'exercice 1, déterminer le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X > k) \leq 0,05$.

Exercice 4 (★★★★☆) Comparaison de deux lois binomiales

Soit un réel $p \in]0,1[$. Nous considérons deux variables aléatoires X et Y qui suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(4; p)$ et $\mathcal{B}(2; p)$.

Selon les valeurs de p , comparer les probabilités $\mathbb{P}(X < 2)$ et $\mathbb{P}(Y < 1)$.

Exercice 5 (★★★★★) Fonctions génératrices

Soient Ω un ensemble d'issues possibles muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ et X une variable aléatoire définie sur Ω telle que

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} = \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction génératrice de X , notée G_X , est le polynôme défini, pour tout réel t , par

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k \mathbb{P}(X = k).$$

- 1. Calculer $G_X(1)$.
- 2. Que peut-on dire de la dérivée de la fonction G_X lorsque $t = 1$?
- 3. Calculer $G_X(t)$ lorsque
 - ▷ X suit une loi de Bernoulli $b(p)$.
 - ▷ X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Dans ce dernier cas, proposer une nouvelle façon d'établir le calcul de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6 (★★★★★) Premier succès lors d'un schéma de Bernoulli : loi géométrique

Dans un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes de même loi $b\left(\frac{1}{e}\right)$, nous considérons l'évènement

$$S_k : \text{ ' } k \text{ est le rang pour lequel un premier succès est réalisé ' },$$

avec $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Nous désignons par X la variable aléatoire qui restitue le premier succès, l'évènement $(X = 0)$ désignant le cas où aucun succès n'est réalisé.

- 1. Calculer la probabilité de $(X = 0)$.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

Vérifier que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$.

- Calculer la probabilité de l'événement $X \geq 2$.

- En observant que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \times \mathbb{P}(X = k),$$

proposer une fonction Python qui restitue l'espérance de X , l'entier n étant choisi par l'utilisateur.

En exécutant cette fonction avec par exemple $n = 100$, que remarquez-vous ?

- Plus généralement, nous supposons que chaque épreuve de Bernoulli suit une loi $b(p)$ où le réel p est généré au hasard dans $]0,1[$ par la commande `random()`.

Modifier la fonction précédente pour obtenir une évaluation de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 7 (★★★★) Loi de Poisson

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

Nous considérons une variable aléatoire X qui suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$ telle que n soit grand et p petit, par exemple $p < 0,1$.

Pour tout entier $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$, nous souhaitons étudier la limite de $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Nous posons $\lambda = np = \mathbb{E}(X)$.

- Un résultat préalable. Justifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

- Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0,n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n - (k-1)}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

- Établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Cette limite est appelée *approximation de Poisson* d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque n est grand et p petit, par exemple $p < 0,1$.

- Un exemple. On estime que 5 % de la récolte de pommes d'un producteur présente un défaut de calibre pour être commercialisée.

On prélève au hasard un échantillon de 100 pommes.

Quelle est la probabilité que 10 pommes exactement ne soient pas calibrées en appliquant

- une loi binomiale ?
- l'approximation de Poisson de cette dernière ?

Exercice 8 (★★★☆☆) Marche aléatoire

Sur une droite graduée par un repère d'origine O , un jeton est placé en O .

On lance un dé équilibré n fois de suite, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Si l'as est obtenu, le jeton est déplacé d'une unité à droite, modélisée par $+1$, sinon le jeton est déplacé d'une unité à gauche modélisée par -1 .

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de déplacements à droite et X l'abscisse du jeton après n déplacements.

- Quelle est la loi de la variable Y ?
- Exprimer X en fonction de Y . En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
- Déterminer la probabilité de l'événement $(X = -n)$, puis de $(X = n)$.
Quelle est la probabilité que le jeton revienne en O après n lancers du dé ?

Variables indépendantes

Exercice 9 (★★★☆☆) Deux joueurs : pile ou face

Deux joueurs lancent chacun une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois de suite. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois « piles ».

Nous rappelons la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 10 (★★★☆☆) Produit de deux variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et Y une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et p . On pose $Z = XY$.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$, puis $\mathbb{P}(Z = k)$ avec k entier, $1 \leq k \leq n$.
Vérifier que la loi de la variable Z est ainsi obtenue.
3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 11 (★★★☆☆) Somme de deux variables indépendantes

Les données sont celles de l'exercice précédent. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer $S(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$, $\mathbb{P}(S = n + 1)$ et $\mathbb{P}(S = k)$ avec k entier, $1 \leq k \leq n$.
Quelle est la loi de la variable S ?
3. Calculer l'espérance et la variance de S .

Les inégalités

Exercice 12 (★★☆☆☆) Bienaymé-Tchebychev

Nous considérons le jeu suivant.

Une pièce équilibrée est lancée 10 fois de suite. À chaque fois que « pile » est obtenu, 2 € sont gagnés sinon « face » amène une perte de 1 €. Nous désignons par

- ▷ X la variable aléatoire comptant le nombre de « piles » obtenu,
- ▷ S la variable aléatoire restituant le gain « algébrique » obtenu à la fin de la partie.

1. Exprimer S en fonction de X .
En déduire l'espérance ainsi que la variance de S .
2. Déterminer un majorant de la probabilité de l'événement

$$(|S - \mathbb{E}(S)| \geq 10).$$

3. Calculer la probabilité de cet événement. Commenter ce résultat.

Exercice 13 (★★★☆☆) Loi des grands nombres

Un dé équilibré cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est lancé n fois de suite. Nous désignons par

- ▷ X_i la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition de la face 1 ou de la face 2,
- ▷ F_n la fréquence d'apparition de l'une de ces deux faces.

1. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(F_n)$ et la variance $\text{Var}(F_n)$.
2. Déterminer un entier naturel n à partir duquel, on a

$$\mathbb{P}\left(F_n \in \left] \frac{7}{30}, \frac{13}{30} \right[\right) \geq 0,95.$$
