



Correction du TD 3 Applications

Correspondances, fonctions, applications

Exercice 1 (★★☆☆)

1. Si $\Gamma = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, le triplet $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \Gamma)$ est-il une application ?
2. Si $\Gamma = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$, le triplet $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \Gamma)$ est-il une application ?

On rappelle qu'une correspondance de E vers F est une application si, et seulement si, son graphe Γ est fonctionnel (pour tout $x \in E$, il existe *au plus* un $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$) et si son ensemble de définition $\{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in \Gamma\}$ est E tout entier (pour tout $x \in E$, il existe *au moins* un tel y).

1. Ici l'ensemble de départ est $E = \mathbb{R}_+$ et l'ensemble d'arrivée est $F = \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^2 \in \mathbb{R}_+$, donc $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$: Γ est bien un graphe de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$.

Le graphe Γ n'est pas fonctionnel : en prenant $t = 1$ puis $t = -1$, on obtient $(1, 1) \in \Gamma$ et $(1, -1) \in \Gamma$. L'élément $x = 1$ de E est donc en correspondance avec deux éléments distincts de F .

Le triplet $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \Gamma)$ n'est pas une application.

2. Ici $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(t^2, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, donc Γ est un graphe de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$.

Ce graphe est fonctionnel : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y, y' \in \mathbb{R}_+$ tels que $(x, y) \in \Gamma$ et $(x, y') \in \Gamma$. Alors $y^2 = x = y'^2$, donc $y = y'$ puisque y et y' sont positifs.

En revanche, l'ensemble de définition de la correspondance est

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}_+, x = y^2\} = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}.$$

Par exemple, $x = -1$ n'est en correspondance avec aucun élément de F .

Le triplet $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \Gamma)$ n'est pas une application : c'est une *fonction* de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$, d'ensemble de définition $\mathbb{R}_+$ (il s'agit de $x \mapsto \sqrt{x}$). Le triplet $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+, \Gamma)$ serait, lui, une application.

Injections, surjections, bijections

Exercice 2 (★★☆☆) Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$1. f_1 \mid \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{array}$$

$$2. f_2 \mid \begin{array}{l} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{array}$$

$$3. f_3 \mid \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, -2x + 2y) \end{array}$$

$$4. f_4 \mid \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, xy) \end{array}$$

$$5. f_5 \mid \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x - y^2 \end{array}$$

$$6. f_6 \mid \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Pour tout $x > 0$, on a $f_1(x) - 2 = x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, donc $f_1(x) \geq 2$.
- f_1 n'est pas injective : $f_1(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$, avec $2 \neq \frac{1}{2}$.
 - f_1 n'est pas surjective : $1 \in \mathbb{R}_+$ n'a pas d'antécédent puisque $f_1(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$.

f_1 n'est ni injective, ni surjective.

2. f_2 est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 1$, $f_2'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 1$. Donc f_2 est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- f_2 est injective : si $x_1 < x_2$ dans $[1, +\infty[$, alors $f_2(x_1) < f_2(x_2)$, donc $x_1 \neq x_2 \implies f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$.
 - f_2 n'est pas surjective : pour tout $x \geq 1$, $f_2(x) \geq f_2(1) = 2$, donc $0 \in \mathbb{R}_+$ n'a pas d'antécédent.

f_2 est injective mais pas surjective.

3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_3(x, y) = (x - y)(1, -2)$.
- f_3 n'est pas injective : $f_3(1, 1) = (0, 0) = f_3(0, 0)$ et $(1, 1) \neq (0, 0)$.
 - f_3 n'est pas surjective : toute image est de la forme $(u, -2u)$ avec $u \in \mathbb{R}$. Le couple $(1, 0)$ n'est pas de cette forme (il faudrait $u = 1$ et $-2u = 0$), donc il n'a pas d'antécédent.

f_3 n'est ni injective, ni surjective.

4.
 - f_4 n'est pas injective : $f_4(1, 2) = (3, 2) = f_4(2, 1)$ et $(1, 2) \neq (2, 1)$.
 - f_4 n'est pas surjective : le couple $(0, 1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, $f_4(x, y) = (0, 1)$ signifie $y = -x$ et $xy = 1$, soit $-x^2 = 1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

f_4 n'est ni injective, ni surjective.

5.
 - f_5 n'est pas injective : $f_5(1, 1) = 0 = f_5(1, -1)$ et $(1, 1) \neq (1, -1)$.
 - f_5 est surjective : pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $f_5(z, 0) = z - 0^2 = z$, donc z admet l'antécédent $(z, 0)$.

f_5 est surjective mais pas injective.

6. On remarque d'abord que, si n est pair, $f_6(n) = \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, et si n est impair, $f_6(n) = -\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}_-$ (entier strictement négatif). La parité de n se lit donc sur le signe de $f_6(n)$.

- f_6 est injective. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f_6(n) = f_6(m)$.
Si $f_6(n) \geq 0$, alors n et m sont pairs et $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$, d'où $n = m$.
Si $f_6(n) < 0$, alors n et m sont impairs et $-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2}$, d'où $n = m$.
- f_6 est surjective. Soit $p \in \mathbb{Z}$.
Si $p \geq 0$, alors $2p \in \mathbb{N}$ est pair et $f_6(2p) = p$.
Si $p < 0$, on pose $k = -p - 1 \in \mathbb{N}$; alors $2k + 1 \in \mathbb{N}$ est impair et $f_6(2k + 1) = -\frac{2k+2}{2} = -(k+1) = p$.

f_6 est bijective.

Exercice 3 (★★☆☆) obligatoire Soit $f \in F^E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes (*penser à un raisonnement circulaire*) :

- (i) L'application f est injective.
- (ii) Tout élément de F possède au plus un antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution.
- (iv) $\forall (x_1, x_2) \in E^2, (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$.

On rappelle la définition du cours : f est injective si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

On raisonne de façon circulaire : $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$.

- $(i) \implies (ii)$ Supposons f injective. Soit $y \in F$ et supposons, par l'absurde, que y possède deux antécédents distincts $x_1 \neq x_2$. Alors $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce qui contredit l'injectivité de f (on devrait avoir $f(x_1) \neq f(x_2)$). Donc y possède au plus un antécédent.
- $(ii) \implies (iii)$ Soit $y \in F$. Les solutions de l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, sont exactement les antécédents de y par f . D'après (ii) , il y en a au plus un.
- $(iii) \implies (iv)$ Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $y = f(x_1) \in F$. Alors x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation $f(x) = y$, qui possède au plus une solution d'après (iii) . Donc $x_1 = x_2$.
- $(iv) \implies (i)$ Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. L'implication $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ est la contraposée de $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, qui est vraie d'après (iv) . Donc f est injective.

Les quatre propositions sont donc équivalentes.

Exercice 4 (★★☆☆) obligatoire Soit $f \in F^E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est surjective.
- (ii) Tout élément de F a au moins un antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.
- (iv) $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

On rappelle la définition du cours : f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$. On raisonne encore de façon circulaire.

- $(i) \implies (ii)$ Supposons f surjective et soit $y \in F$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$: cet élément x est un antécédent de y . Donc y a au moins un antécédent.
- $(ii) \implies (iii)$ Soit $y \in F$. Un antécédent de y est exactement une solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$. D'après (ii) , cette équation possède donc au moins une solution.
- $(iii) \implies (iv)$ Soit $y \in F$. D'après (iii) , l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est exactement (iv) .
- $(iv) \implies (i)$ La proposition (iv) est la définition de la surjectivité de f .

Les quatre propositions sont donc équivalentes.

Exercice 5 (★★☆☆) obligatoire Soit $f \in F^E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est bijective.
- (ii) Tout élément de F a un et un seul antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution.
- (iv) $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

On rappelle que f est bijective si elle est à la fois injective et surjective. On utilise les caractérisations des exercices 3 et 4.

- $(i) \implies (ii)$ Supposons f bijective et soit $y \in F$. Comme f est injective, y a au plus un

antécédent (exercice 3). Comme f est surjective, y a au moins un antécédent (exercice 4). Donc y a un et un seul antécédent.

- $(ii) \implies (iii)$ Soit $y \in F$. Les solutions de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ sont exactement les antécédents de y . D'après (ii), il y en a exactement un : l'équation possède une unique solution.
- $(iii) \implies (iv)$ Soit $y \in F$. Dire que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution, c'est dire qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est (iv).
- $(iv) \implies (i)$ Supposons (iv).

Surjectivité : pour tout $y \in F$, il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc f est surjective (exercice 4).

Injectivité : soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $y = f(x_1)$. Alors x_1 et x_2 vérifient tous deux $y = f(x)$; par unicité dans (iv), $x_1 = x_2$. Donc f est injective (exercice 3).

Ainsi, f est bijective.

Les quatre propositions sont donc équivalentes.

Exercice 6 (★★★★) Soit E et F deux ensembles non vides. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement s'il existe une application surjective de F dans E .

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe une injection f de E vers F . Chaque élément de $f(E)$ a donc exactement un antécédent par f . Soit $x_0 \in E$. Soit $g : F \rightarrow E$ l'application définie ainsi : si $y \in f(E)$, alors $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f ; si $y \notin f(E)$, $g(y) = x_0$. L'application g est bien définie. Montrons qu'elle est surjective. Soit $x \in E$. Soit y son image par f . Par définition, $y \in f(E)$, donc $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f , donc $g(y) = x$. Donc x a au moins un antécédent par g , donc g est surjective. Donc il existe une surjection de F vers E . (remarque : l'application g dépend du choix de x_0 , mais peu importe : pour n'importe quel choix de x_0 , elle est bien définie et surjective).

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection g de F vers E . Chaque élément de E a donc au moins un antécédent par g . Pour chaque élément x de E , choisissons un de ses antécédents par g (peu importe lequel), et appelons-le $f(x)$. Cela définit une application $f : E \rightarrow F$. Montrons que cette application est injective. Soit $x \in E$. Par définition, $f(x)$ est un antécédent de x par g , donc $g(f(x)) = x$, donc $g \circ f = \text{Id}_E$, donc $g \circ f$ est bijective, donc injective. Donc f est injective. Donc il existe une injection de E dans F .

Il existe une injection de E dans F si, et seulement si, il existe une surjection de F dans E .

Application réciproque

Exercice 7 (★☆☆☆) Pour chacune des applications f suivantes, donner l'ensemble d'arrivée J tel que f soit bijective. Expliciter ensuite sa réciproque.

$$1. f \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow J \\ x & \longmapsto 1 + e^x \end{array} \right.$$

$$2. f \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow J \\ x & \longmapsto -\frac{x}{2} - 1 \end{array} \right.$$

$$3. f \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow J \\ x & \longmapsto \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

$$4. f \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow J \\ x & \longmapsto x(1+x) \end{array} \right.$$

Méthode. Pour y réel, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans l'ensemble de départ. L'ensemble J des y pour lesquels elle admet une solution est l'image de f ; si, pour tout $y \in J$,

cette solution est unique, alors $f : E \longrightarrow J$ est bijective et l'expression de la solution en fonction de y donne f^{-1} .

1. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $1 + e^x = y \iff e^x = y - 1$. Comme $e^x > 0$, cette équation n'a pas de solution si $y \leq 1$; si $y > 1$, elle équivaut à $x = \ln(y - 1)$ (unique solution). Donc $J =]1, +\infty[$ et

$$J =]1, +\infty[, \quad f^{-1} \left| \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln(y - 1) \end{array} \right.$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On a $-\frac{x}{2} - 1 = y \iff x = -2(y + 1) = -2y - 2$. Cette unique solution appartient à $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $-2y - 2 \geq 0 \iff y \leq -1$. Donc

$$J =]-\infty, -1], \quad f^{-1} \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, -1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & -2y - 2 \end{array} \right.$$

3. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $1 + x^2 > 0$, on a $f(x) > 0$: si $y \leq 0$, pas de solution. Pour $y > 0$:

$$\frac{1}{1 + x^2} = y \iff 1 + x^2 = \frac{1}{y} \iff x^2 = \frac{1 - y}{y}.$$

Puisque $x \geq 0$, cette équation a une solution si, et seulement si, $\frac{1 - y}{y} \geq 0$, c'est-à-dire $y \leq 1$ (car $y > 0$), et elle est alors unique : $x = \sqrt{\frac{1 - y}{y}}$. Donc

$$J =]0, 1], \quad f^{-1} \left| \begin{array}{ccc}]0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{\frac{1 - y}{y}} \end{array} \right.$$

4. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On a $x(1 + x) = y \iff x^2 + x - y = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1 + 4y$.

- Si $y < -\frac{1}{4}$, $\Delta < 0$: pas de solution réelle.
- Si $-\frac{1}{4} \leq y < 0$, les racines réelles ont pour somme $-1 < 0$ et pour produit $-y > 0$: elles sont toutes deux strictement négatives, donc aucune n'est dans $\mathbb{R}_+$.
- Si $y \geq 0$, les racines sont $x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}$. On a $x_- < 0$, et $x_+ \geq 0 \iff \sqrt{1 + 4y} \geq 1 \iff y \geq 0$, ce qui est le cas. L'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$: $x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2}$.

Donc

$$J = \mathbb{R}_+, \quad f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2} \end{array} \right.$$

Exercice 8 (★★★☆☆) Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . On considère l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

1. $\Rightarrow$ Supposons f injective. Alors :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad f(X_1) = f(X_2) \implies X_1 = X_2.$$

D'une part, $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$.

D'autre part, $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$.

Ainsi, $f(A \cup B) = f(E)$, donc $A \cup B = E$.

- $\Leftarrow$ Supposons $A \cup B = E$. Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $f(X_1) = f(X_2)$. On a donc $X_1 \cap A = X_2 \cap A$ et $X_1 \cap B = X_2 \cap B$, d'où :

$$(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B).$$

Or, comme $A \cup B = E$, $(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = X_1$ et $(X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2$.

Ainsi, $X_1 = X_2$. On a donc f injective.

En conclusion, $f \text{ injective} \iff A \cup B = E$.

2. $\Rightarrow$ Supposons f surjective. Alors :

$$\forall (Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \exists X \in \mathcal{P}(E), \quad (Y_1, Y_2) = f(X).$$

En particulier, on peut trouver $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $(\emptyset, A \cap B) = f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

Ainsi, $X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = A \cap B$. On a donc :

$$\emptyset = \emptyset \cap B = (X \cap A) \cap B = (X \cap B) \cap A = (A \cap B) \cap A = A \cap B$$

D'où $A \cap B = \emptyset$.

- $\Leftarrow$ Supposons $A \cap B = \emptyset$. Soit $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a donc $Y_1 \cap B = Y_2 \cap A = \emptyset$. Posons $X = Y_1 \cup Y_2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(X) &= ((Y_1 \cup Y_2) \cap A, (Y_1 \cup Y_2) \cap B) \\ &= ((Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A), (Y_1 \cap B) \cup (Y_2 \cap B)) \\ &= (Y_1, Y_2). \end{aligned}$$

Ainsi, f est surjective.

En conclusion, $f \text{ surjective} \iff A \cap B = \emptyset$.

3. Supposons $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

$$\text{Soit } g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (X_1, X_2) & \longmapsto & X_1 \cup X_2 \end{array} \right.$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f(X) &= g(X \cap A, X \cap B) \\ &= (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ &= X \quad \text{car } A \cup B = E. \end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Par ailleurs, pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on a :

$$\begin{aligned} f \circ g(X_1, X_2) &= f(X_1 \cup X_2) \\ &= ((X_1 \cup X_2) \cap A, (X_1 \cup X_2) \cap B) \\ &= ((X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap A), (X_1 \cap B) \cup (X_2 \cap B)) \\ &= (X_1, X_2) \quad \text{car } X_1 \subset A, X_2 \subset B \text{ et } A \cap B = \emptyset. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$.

Les applications f et g sont donc bijectives et réciproques l'une de l'autre, on a :

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (X_1, X_2) & \longmapsto & X_1 \cup X_2 \end{array} \right.$$

Composition des applications

Exercice 9 (★☆☆☆) Soit $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow E$. À quelle condition sur E et F a-t-on $u \circ v = v \circ u$?

Les deux composées sont bien définies : $u \circ v : F \longrightarrow F$ et $v \circ u : E \longrightarrow E$.

Deux applications sont égales si, et seulement si, elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et les mêmes images. L'égalité $u \circ v = v \circ u$ impose donc en particulier $F = E$ (ensembles de départ) : il est nécessaire que $E = F$.

Cette condition n'est pas suffisante : lorsque $E = F$, les deux composées ont même ensemble de départ et d'arrivée, mais elles n'ont pas de raison de coïncider. Par exemple, avec $E = F = \mathbb{R}$, $u : x \longmapsto x + 1$ et $v : x \longmapsto 2x$, on a, pour tout réel x ,

$$u \circ v(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad v \circ u(x) = 2x + 2,$$

donc $u \circ v \neq v \circ u$. L'égalité $u \circ v = v \circ u$ n'a donc de sens que si $E = F$, et elle dépend alors des applications u et v choisies (la composition n'est pas commutative en général).

Exercice 10 (★☆☆☆) Soit $E = F = \mathbb{N}$. Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(2n) = n \text{ et } g(2n+1) = 0.$$

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
2. Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$.
3. Conclure.

1.
 - f est injective : pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $f(n) = f(m) \implies 2n = 2m \implies n = m$.
 - f n'est pas surjective : $f(n) = 2n$ est pair pour tout n , donc 1 n'a pas d'antécédent par f .
 - g n'est pas injective : $g(1) = g(3) = 0$ (tous les impairs ont pour image 0) et $1 \neq 3$.
 - g est surjective : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(2n) = n$, donc n admet $2n$ pour antécédent.

f est injective non surjective ; g est surjective non injective.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = g(2n) = n$. Donc $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$: si n est pair, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $f \circ g(n) = f(k) = 2k = n$; si n est impair, $g(n) = 0$ et $f \circ g(n) = f(0) = 0$. Donc

$$f \circ g \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array} \right.$$

En particulier $f \circ g(1) = 0 \neq 1$, donc $f \circ g \neq \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

3. On a $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ sans que f ni g soient bijectives, et sans que $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

Une seule des deux égalités $g \circ f = \text{Id}_E$, $f \circ g = \text{Id}_F$ ne suffit pas pour conclure que f et g sont bijectives : il faut les deux (proposition du cours).

On retrouve en revanche que $g \circ f$ injective entraîne f injective, et $g \circ f$ surjective entraîne g surjective.

Fonction indicatrice (ou caractéristique)

Exercice 11 (★★☆☆) Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E .

1. Rappeler les fonctions caractéristiques de $\bar{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Retrouver, à l'aide des fonctions indicatrices, que $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

1. D'après le cours :

$$\boxed{\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.}$$

2. On utilise le fait que deux parties de E sont égales si, et seulement si, elles ont la même fonction indicatrice (l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$). On utilise aussi que $\mathbb{1}_A$ ne prend que les valeurs 0 et 1, donc $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$, et de même $\mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_B$. On a alors :

$$\begin{aligned} A \cap B = A \cup B &\iff \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_{A \cup B} \\ &\iff \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\ &\iff \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0 \\ &\iff \mathbb{1}_A^2 + \mathbb{1}_B^2 - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0 \\ &\iff (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 = 0 \\ &\iff \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B = 0 \\ &\iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \\ &\iff A = B. \end{aligned}$$

(Ces égalités de fonctions s'entendent en tout point $x \in E$; l'avant-dernière équivalence utilise qu'un réel de carré nul est nul.)

$$\boxed{A \cap B = A \cup B \iff A = B.}$$

Exercice 12 (★★☆☆) Soit A_1 , A_2 et A_3 trois parties de E . On pose $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

1. Montrer que $1 - \mathbb{1}_A = (1 - \mathbb{1}_{A_1})(1 - \mathbb{1}_{A_2})(1 - \mathbb{1}_{A_3})$.
2. En déduire, E étant un ensemble fini :
 $\text{Card } A = \text{Card } A_1 + \text{Card } A_2 + \text{Card } A_3 - \text{Card } A_2 \cap A_3 - \text{Card } A_1 \cap A_3 - \text{Card } A_1 \cap A_2 + \text{Card } A_1 \cap A_2 \cap A_3.$

1. Par les lois de De Morgan, $\bar{A} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$. En utilisant $\mathbb{1}_{\bar{X}} = 1 - \mathbb{1}_X$ et $\mathbb{1}_{X \cap Y} = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_Y$:

$$1 - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\bar{A}} = \mathbb{1}_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3} = \mathbb{1}_{\bar{A}_1} \mathbb{1}_{\bar{A}_2} \mathbb{1}_{\bar{A}_3} = (1 - \mathbb{1}_{A_1})(1 - \mathbb{1}_{A_2})(1 - \mathbb{1}_{A_3}).$$

$$\boxed{1 - \mathbb{1}_A = (1 - \mathbb{1}_{A_1})(1 - \mathbb{1}_{A_2})(1 - \mathbb{1}_{A_3}).}$$

2. On développe le produit : pour tous réels a, b, c ,

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc.$$

Avec $a = \mathbb{1}_{A_1}$, $b = \mathbb{1}_{A_2}$, $c = \mathbb{1}_{A_3}$ et $\mathbb{1}_X \mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_{X \cap Y}$, la question 1 donne :

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \mathbb{1}_{A_3} - \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} - \mathbb{1}_{A_1 \cap A_3} - \mathbb{1}_{A_2 \cap A_3} + \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}.$$

Comme E est fini, pour toute partie X de E , on a $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_X(x) = \text{Card } X$ (chaque élément de X compte pour 1, les autres pour 0). En sommant l'égalité précédente sur tous les $x \in E$:

$$\boxed{\text{Card } A = \text{Card } A_1 + \text{Card } A_2 + \text{Card } A_3 - \text{Card } A_2 \cap A_3 - \text{Card } A_1 \cap A_3 - \text{Card } A_1 \cap A_2 + \text{Card } A_1 \cap A_2 \cap A_3.}$$

Images directes et réciproques d'ensembles

Exercice 13 (★☆☆☆) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := \cos x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $f(\mathbb{R})$ | 5. $f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right)$ | 8. $f(f^{-1}(\{0\}))$ |
| 2. $f([0, \pi])$ | 6. $f^{-1}([0, 1])$ | 9. $f^{-1}\left(f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)\right)$ |
| 3. $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ | 7. $f^{-1}(f(\{0\}))$ | 10. $f(f^{-1}([0, 1]))$. |
| 4. $f^{-1}(\{0\})$ | | |

On rappelle que $f(A) = \{\cos x \mid x \in A\}$ et $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in B\}$; la notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas f bijective (et $\cos$ ne l'est pas sur $\mathbb{R}$).

1. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $f(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$. Réciproquement, $\cos$ est continue sur $[0, \pi]$, avec $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$: par le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur de $[-1, 1]$ est atteinte. $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

2. Par le même argument (continuité et valeurs 1 et -1 aux bornes), $f([0, \pi]) = [-1, 1]$.

3. Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos$ est positive, continue, prend la valeur 0 en $\pm \frac{\pi}{2}$ et la valeur 1 en 0; elle prend donc toutes les valeurs de $[0, 1]$ et aucune autre. $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1]$.

4. $\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$. $f^{-1}(\{0\}) = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \iff x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 $f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Comme $\cos x \leq 1$ pour tout x , $f^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \geq 0\}$. Sur une période $[-\pi, \pi]$, $\cos x \geq 0 \iff x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et $\cos$ est 2π -périodique.

$$f^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right].$$

7. $f(\{0\}) = \{\cos 0\} = \{1\}$, et $\cos x = 1 \iff x \equiv 0 [2\pi]$. $f^{-1}(f(\{0\})) = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On remarque que cet ensemble contient strictement $\{0\}$.

8. Tous les éléments de $f^{-1}(\{0\})$ ont pour image 0, et cet ensemble n'est pas vide. $f(f^{-1}(\{0\})) = \{0\}$.

9. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos$ est continue, décroissante de 1 à 0, donc $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$, et d'après la question 6 : $f^{-1}(f([0, \frac{\pi}{2}])) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$. Là encore, cet ensemble contient strictement $[0, \frac{\pi}{2}]$.

10. Les éléments de $f^{-1}([0, 1])$ ont leur image dans $[0, 1]$, donc $f(f^{-1}([0, 1])) \subset [0, 1]$. Réciproquement, $f^{-1}([0, 1])$ contient $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dont l'image est $[0, 1]$ (question 3). $f(f^{-1}([0, 1])) = [0, 1]$.

Exercice 14 (★★☆☆) obligatoire Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux parties de E , C et D deux parties de F .

Montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $f(f^{-1}(C)) \subset C$.
6. $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

On utilise les définitions : pour $A \subset E$, $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$; pour $C \subset F$, $x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C$.

1. Soit $y \in F$. On a :

$$\begin{aligned}
 y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B, y = f(x) \\
 &\iff (\exists x \in A, y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in B, y = f(x)) \\
 &\iff y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\
 &\iff y \in f(A) \cup f(B).
 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).}$$

2. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $y \in f(A)$; comme $x \in B$, $y \in f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$. $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).}$

L'inclusion réciproque est fausse en général : pour $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$, on a $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ mais $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

3. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \iff (f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D) \\
 &\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).
 \end{aligned}$$

$$\boxed{f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).}$$

4. De même, pour $x \in E$:

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D \iff (f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D) \\
 &\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).
 \end{aligned}$$

$$\boxed{f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).}$$

5. Soit $y \in f(f^{-1}(C))$. Il existe $x \in f^{-1}(C)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(C)$ signifie $f(x) \in C$, donc $y \in C$. $\boxed{f(f^{-1}(C)) \subset C.}$

6. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ par définition de l'image directe, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(f(A))$.

$$\boxed{A \subset f^{-1}(f(A)).}$$

Exercice 15 (★★☆☆) Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F .

1. Montrer qu'on a $\forall A \subseteq E, \quad A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A \subseteq E, \quad A = f^{-1}(f(A))$.
3. Montrer qu'on a $\forall B \subseteq F, \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout $B \subseteq F, \quad B = f(f^{-1}(B))$.

1. Soit $A \subseteq E$ et $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. $\boxed{A \subseteq f^{-1}(f(A)).}$

2. $\Rightarrow$ Supposons f injective et soit $A \subseteq E$. D'après la question 1, il reste à montrer $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$: on a $f(x) \in f(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité de f , $x = a$, donc $x \in A$. Ainsi $A = f^{-1}(f(A))$.

⊆ Réciproquement, supposons que pour toute partie A de E , $A = f^{-1}(f(A))$. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Appliquons l'hypothèse à $A = \{x_1\}$: $f(A) = \{f(x_1)\}$ et $f(x_2) = f(x_1) \in f(A)$, donc $x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x_1\}$. D'où $x_2 = x_1$: f est injective.

$$f \text{ injective} \iff \forall A \subseteq E, A = f^{-1}(f(A)).$$

3. Soit $B \subseteq F$ et $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, et $x \in f^{-1}(B)$ signifie $f(x) \in B$. Donc $y \in B$. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

4. $\Rightarrow$ Supposons f surjective et soit $B \subseteq F$. D'après la question 3, il reste à montrer $B \subseteq f(f^{-1}(B))$. Soit $y \in B$. Par surjectivité, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; alors $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$, et $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi $B = f(f^{-1}(B))$.

⊆ Réciproquement, supposons que pour toute partie B de F , $B = f(f^{-1}(B))$. Appliquons l'hypothèse à $B = F$: comme $f^{-1}(F) = \{x \in E \mid f(x) \in F\} = E$, on obtient $F = f(E)$. Tout élément de F est donc l'image d'un élément de E : f est surjective.

$$f \text{ surjective} \iff \forall B \subseteq F, B = f(f^{-1}(B)).$$

Exercice 16 (★★★☆☆) Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F . On considère les applications :

$$\phi \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{cases}$$

et

$$\psi \begin{cases} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{cases}$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) f est injective
- b) ϕ est injective
- c) ψ est surjective

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) f est surjective
- b) ϕ est surjective
- c) ψ est injective

On utilise librement les résultats de l'exercice 15 : pour toute partie A de E et toute partie B de F , $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, avec égalité pour tout A si, et seulement si, f est injective, et égalité pour tout B si, et seulement si, f est surjective. On remarque aussi que $\psi \circ \phi(A) = f^{-1}(f(A))$ et $\phi \circ \psi(B) = f(f^{-1}(B))$.

1. On montre $(a) \iff (b)$ puis $(a) \iff (c)$.

- $(a) \implies (b)$ Supposons f injective. Soit $(A, A') \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $\phi(A) = \phi(A')$, c'est-à-dire $f(A) = f(A')$. Alors, d'après l'exercice 15 (question 2),

$$A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(A')) = A'.$$

Donc ϕ est injective.

- $(b) \implies (a)$ Supposons ϕ injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $\phi(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = \phi(\{x_2\})$, donc $\{x_1\} = \{x_2\}$ par injectivité de ϕ , d'où $x_1 = x_2$. Donc f est injective.
- $(a) \implies (c)$ Supposons f injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Posons $B = f(A) \in \mathcal{P}(F)$; alors, d'après l'exercice 15 (question 2), $\psi(B) = f^{-1}(f(A)) = A$. Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ a donc un antécédent par ψ : ψ est surjective.
- $(c) \implies (a)$ Supposons ψ surjective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. La partie $\{x_1\}$ de E admet un antécédent par ψ : il existe $B \subseteq F$ tel que $f^{-1}(B) = \{x_1\}$.

Comme $x_1 \in f^{-1}(B)$, on a $f(x_1) \in B$, donc $f(x_2) \in B$, donc $x_2 \in f^{-1}(B) = \{x_1\}$, d'où $x_2 = x_1$. Donc f est injective.

$$f \text{ injective} \iff \phi \text{ injective} \iff \psi \text{ surjective.}$$

2. On montre de même $(a) \iff (b)$ puis $(a) \iff (c)$.

- $(a) \implies (b)$ Supposons f surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Posons $A = f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(E)$; alors, d'après l'exercice 15 (question 4), $\phi(A) = f(f^{-1}(B)) = B$. Donc ϕ est surjective.
- $(b) \implies (a)$ Supposons ϕ surjective. La partie F de F admet un antécédent : il existe $A \subseteq E$ tel que $f(A) = F$. Comme $A \subseteq E$, on a $F = f(A) \subseteq f(E) \subseteq F$, donc $f(E) = F$: f est surjective.
- $(a) \implies (c)$ Supposons f surjective. Soit $(B, B') \in \mathcal{P}(F)^2$ tel que $\psi(B) = \psi(B')$, c'est-à-dire $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$. Alors, d'après l'exercice 15 (question 4),

$$B = f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B')) = B'.$$

Donc ψ est injective.

- $(c) \implies (a)$ Supposons ψ injective. On a $f^{-1}(F) = E$ et, d'après l'exercice 15 (question 1) appliqué à $A = E$, $E \subseteq f^{-1}(f(E)) \subseteq E$, donc $f^{-1}(f(E)) = E$. Ainsi $\psi(f(E)) = E = \psi(F)$, et l'injectivité de ψ donne $f(E) = F$: f est surjective.

$$f \text{ surjective} \iff \phi \text{ surjective} \iff \psi \text{ injective.}$$

Familles indexées

Exercice 17 (★★★★) Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J_h =]-h, h[$. Montrer que :

$$\bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h = \mathbb{R}.$$

On rappelle que x appartient à l'intersection si, et seulement si, $x \in J_h$ pour *tout* $h \in \mathbb{R}_+^*$, et à la réunion si, et seulement si, $x \in J_h$ pour *au moins un* $h \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $x \in J_h \iff -h < x < h \iff |x| < h$.

- *Intersection.* Pour tout $h > 0$, $|0| = 0 < h$, donc $0 \in J_h$: ainsi $\{0\} \subset \bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h$.

Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h$ et supposons par l'absurde $x \neq 0$. Alors $h_0 = |x|$ est un élément de $\mathbb{R}_+^*$, et $x \in J_{h_0}$ donnerait $|x| < |x|$, ce qui est faux. Donc $x = 0$, d'où

$$\bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h \subset \{0\}. \quad \text{Finalement,} \quad \boxed{\bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h = \{0\}.$$

- *Réunion.* Chaque J_h est une partie de $\mathbb{R}$, donc $\bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h \subset \mathbb{R}$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $h_0 = |x| + 1 \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $|x| < h_0$, donc $x \in J_{h_0}$, et $x \in \bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h$. D'où $\mathbb{R} \subset \bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h$.

Finalement, $\boxed{\bigcup_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h = \mathbb{R}.$