T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

2025–2026

Lycée Saint-Augustin

TD 8 **Suites**

Exercice 1 (★☆☆☆) Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = 2n^2 + 3n - 3$
2. $u_n = n^2 - n + 1$
3. $u_n = \dfrac{2}{n+2}$
4. $u_n = \dfrac{3n^2+2}{n+3}$
5. $u_n = \dfrac{4n-2}{n+8}$
6. $u_n = \left(n^2 - 7n + 2\right)\left(5n + \sqrt{n}\right)$
7. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$
8. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$
9. $u_n = -\sqrt{n^3+7}$
10. $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$
11. $u_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$
12. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(2 - 3n + 8n^2\right)$

Exercice 2 (★☆☆☆) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :

a) la suite (w_n) tend vers $-\infty$ **b)** la suite (u_n) tend vers $-\infty$ **c)** la suite (w_n) n'a pas de limite

2. Si $w_n = 2u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $(\ell > 0)$, alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ **b)** On ne peut rien dire sur la limite de (v_n) **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $w_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, alors :

a) On ne peut rien dire sur la convergence de la suite (v_n) **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$ **c)** la suite (v_n) n'a pas de limite

4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$, alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

Exercice 3 (★☆☆☆) Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 3 + 5n$
2. $u_n = 5 + \dfrac{1}{n+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$
4. $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$
5. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$
6. $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - 4$
7. $u_n = n + (-1)^n$

Exercice 4 (★★☆☆) Suite homographique

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Vérifier que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 5 - \frac{8}{u_n + 1}.$$

En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n < 3.$$

2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n). Cette suite converge-t-elle ?

Nous considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

3. Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, deux solutions distinctes r_1, r_2 telles que $r_1 < r_2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

$$v_n = \frac{u_n - r_2}{u_n - r_1}.$$

4. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 5 (★★★☆) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2}{n!}.$$

1. Conjecturer le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Justifier que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

3. Prouver que : pour tout entier naturel,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n.$$

4. En déduire que :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 6 (★★★☆) Divergence de la série harmonique

On considère la suite (h_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Quel est le sens de variations de (h_n) ?

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{2n} - h_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

3. Prouver que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n_0} \geqslant k.$$

En déduire que la suite (h_n) diverge vers $+\infty$.

4. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n \leqslant 2\sqrt{n}.$$

En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h_n}{n} = 0.$$

Exercice 7 (★★★☆) Suites adjacentes et factoriels

Nous considérons les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \times k!} \\ \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2 \times n!} \end{cases}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. Soit ℓ leur limite commune. Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 8 (★★★★) Démontrer le théorème suivant de deux façons différentes : par un raisonnement par récurrence d'une part, et en faisant appel au théorème de convergence monotone d'autre part.

Théorème 1 – Théorème de croissance comparée des suites géométriques et factorielle

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 9 (★★★★) Flocon de von Koch

On construit une suite $(F_n)_{n \geq 1}$ de polygones de la manière suivante. On prend pour F_1 un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on passe de F_n à F_{n+1} en partageant chaque segment du pourtour de F_n en trois segments égaux, puis en substituant au segment central une réunion de deux segments égaux formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral dirigé vers l'extérieur. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient c_n, ℓ_n, p_n et a_n le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire de F_n.

1. Dessiner sommairement F_1, F_2, F_3.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer c_n, ℓ_n et p_n en fonction de n. Déterminer la limite de $(p_n)_{n \geq 1}$.

3. Calculer a_1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Montrer que $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie que l'on calculera.
