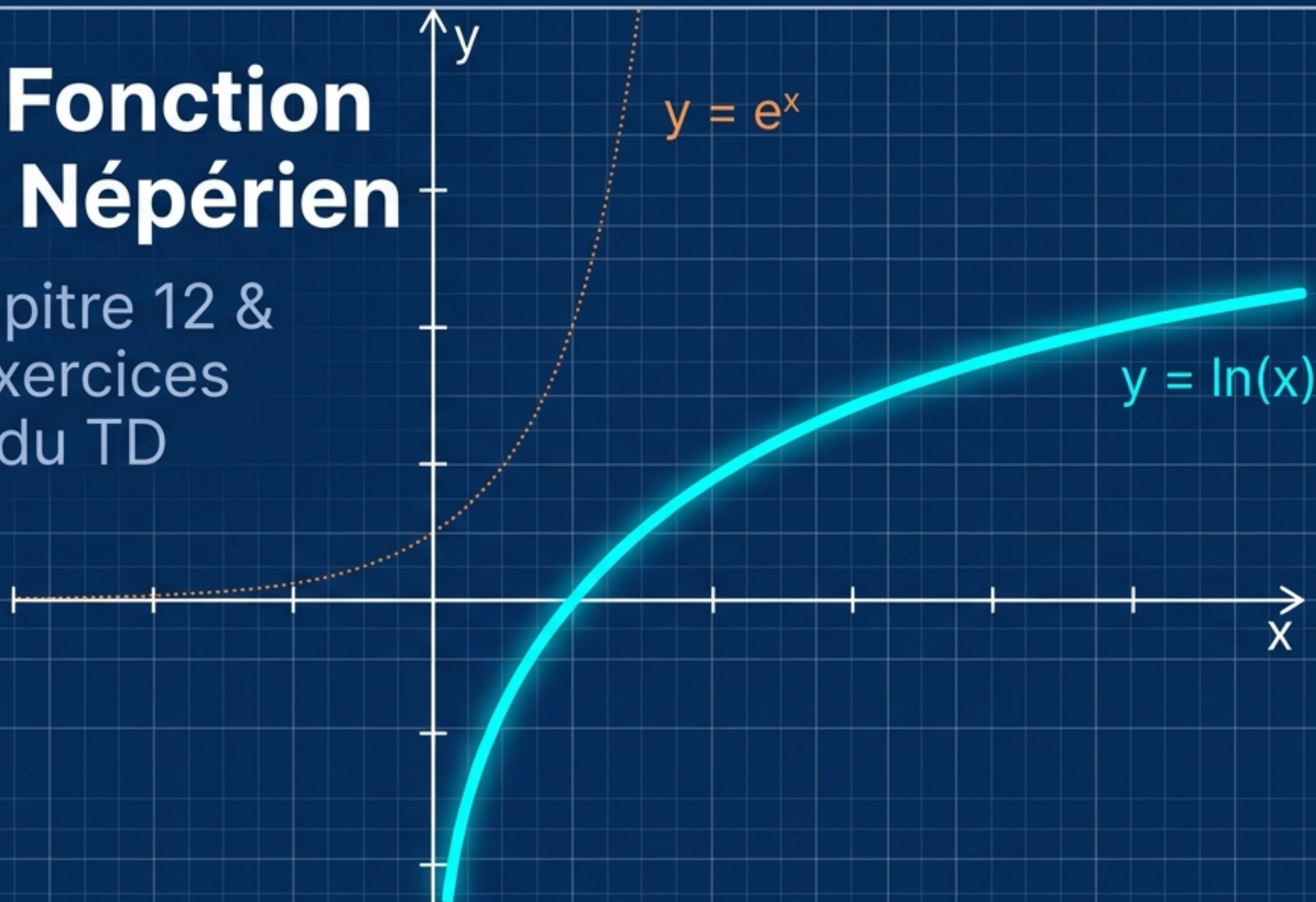


# Maîtriser la Fonction Logarithme Népérien

Synthèse du Chapitre 12 &  
Résolution des exercices  
incontournables du TD



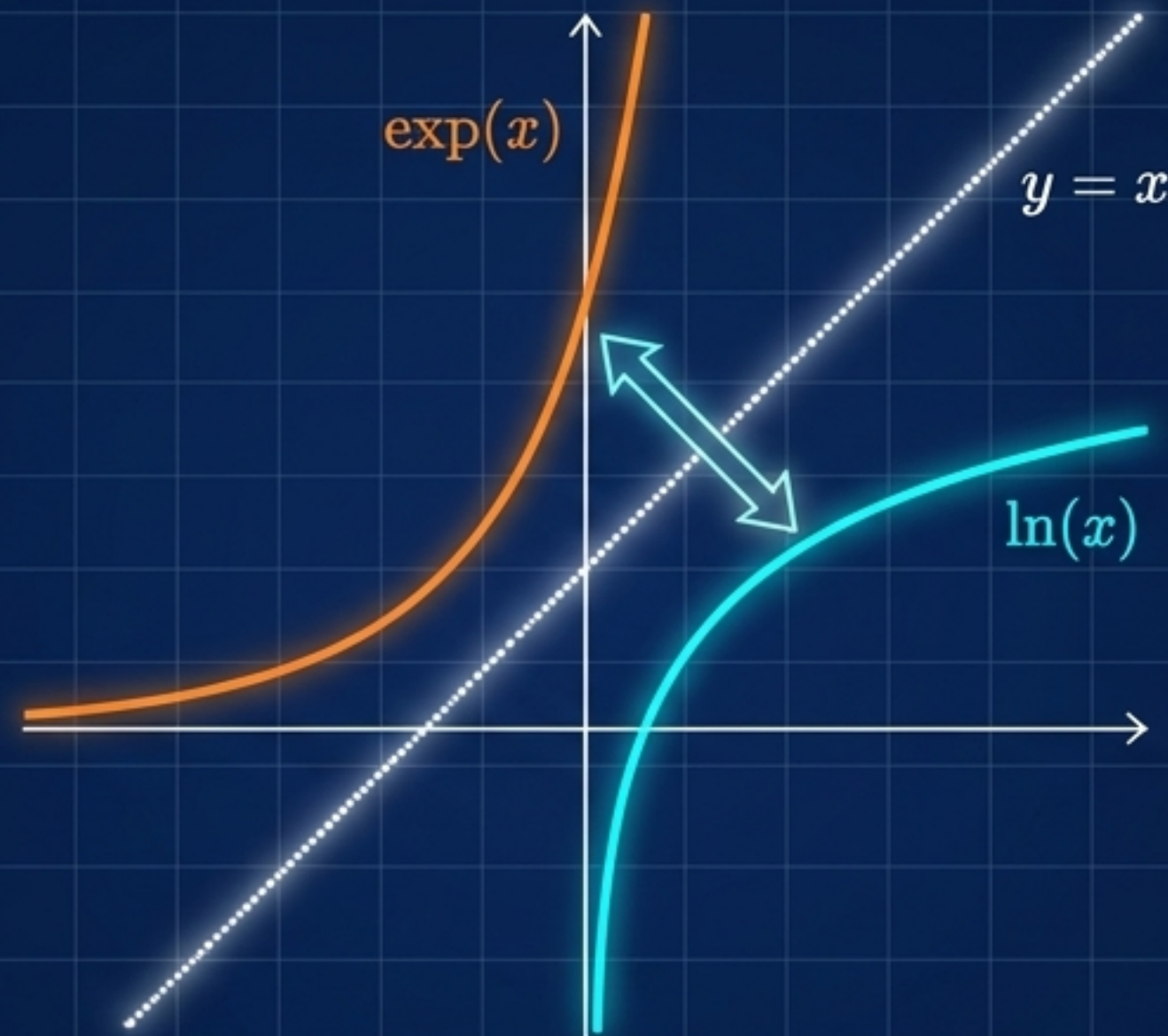
Transformer les multiplications en additions : de la théorie à l'application.

# L'Origine : Le Miroir de l'Exponentielle

## Le Concept de Réciproque

La fonction  $\exp$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, +\infty[$ .

Sa fonction réciproque est le logarithme népérien ( $\ln = \exp^{-1}$ ).



## L'Équivalence Fondamentale

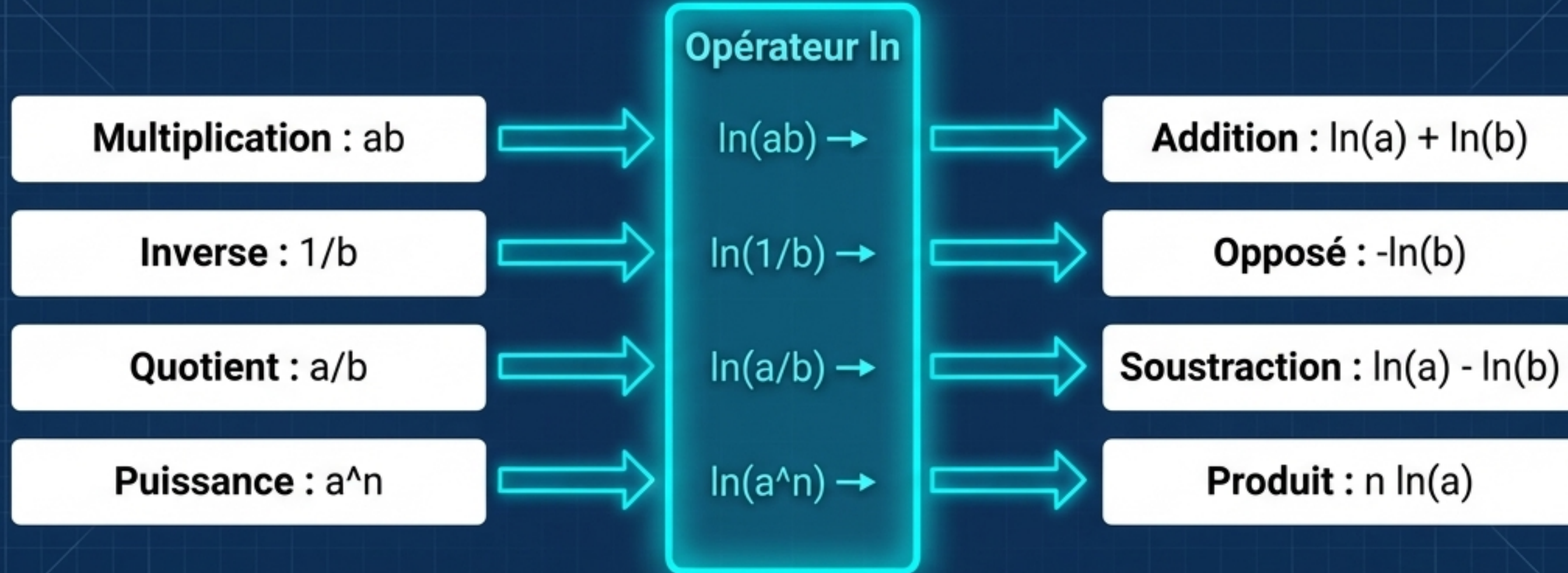
Pour tout  $y \in ]0, +\infty[$ , l'équation  $e^x = y$  admet une unique solution notée  $x = \ln(y)$ .

## Les Règles d'Or

$$\ln(e) = 1 \text{ et } \ln(1) = 0 \quad e^{\ln x} = x \text{ (pour } x > 0) \quad \ln(e^x) = x \text{ (pour tout } x)$$

# La Machine à Simplifier : Propriétés Algébriques

## Translation Table



### La Condition Sine Qua Non

**Attention !** Ces propriétés ne s'appliquent que si et seulement si  $a > 0$  et  $b > 0$ .  
Ne jamais appliquer l'opérateur avant d'avoir vérifié l'ensemble de validité.

# Mécanique de Précision : Dérivée et Variations

## Le Taux Standard

Dérivée classique :  
Pour  $x > 0$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$



Puisque  $x > 0$ , la dérivée est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Conséquence :  
La fonction est strictement croissante.

*“Une croissance perpétuelle, mais de plus en plus lente.”*

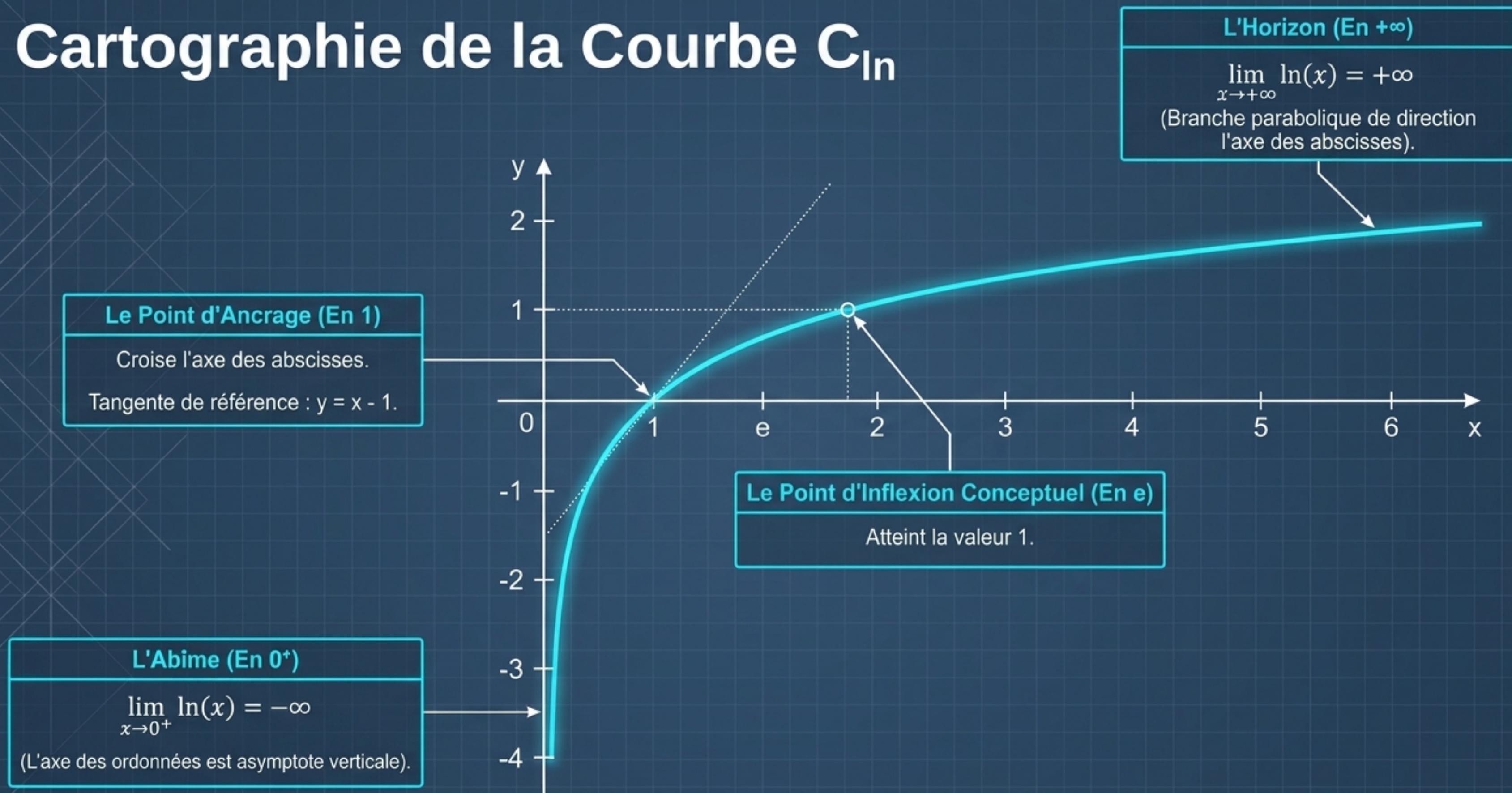
## La Règle en Chaîne : $\ln(u)$

Fonction interne  
 $u(x) > 0$

Calcul de la dérivée  
 $u'(x)$

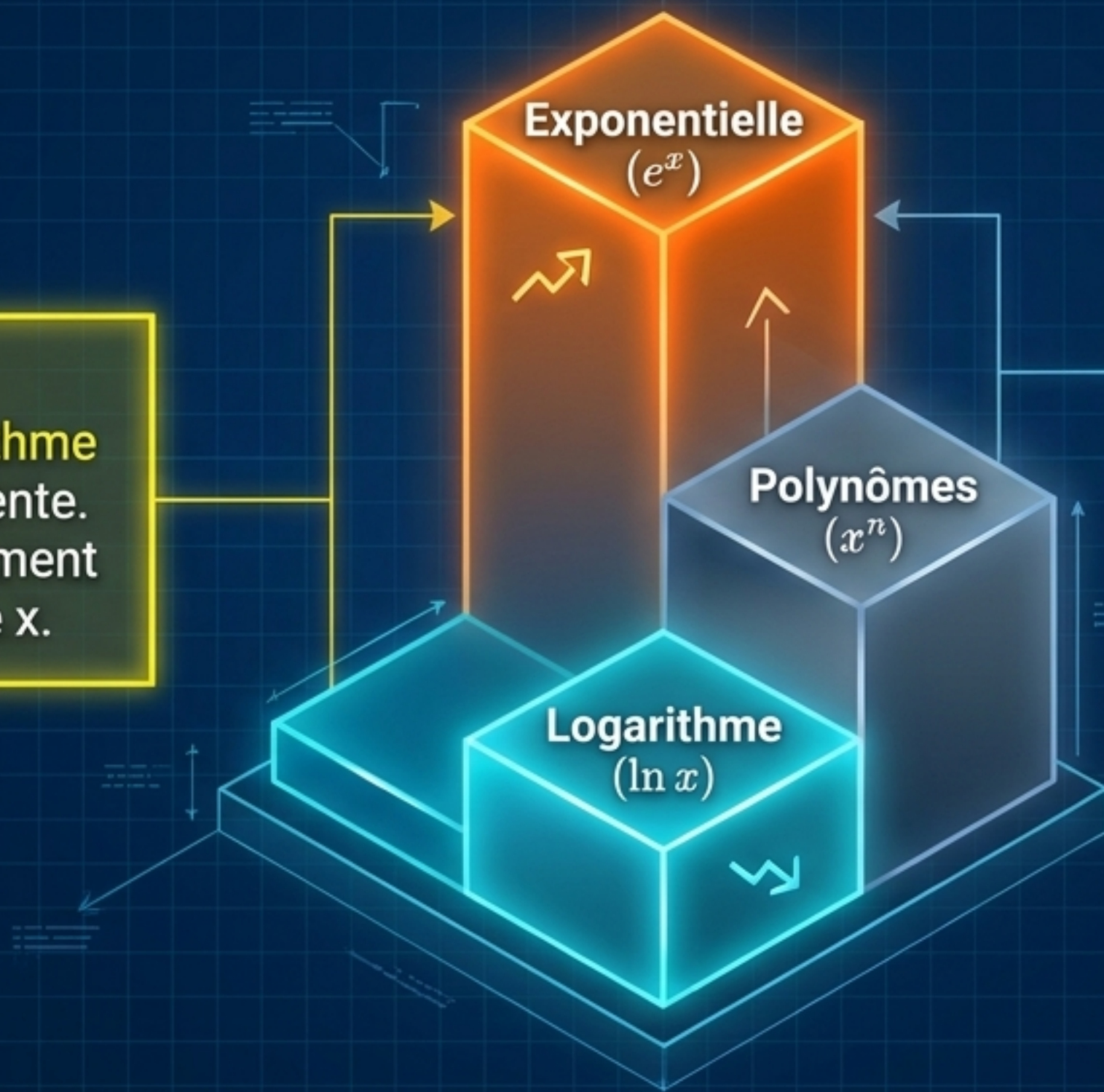
Formule finale :  
 $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

# Cartographie de la Courbe $C_{\ln}$



# Croissance Comparée : Qui l'emporte à l'infini ?

Dans un **affrontement asymptotique**, le **logarithme** est la fonction la plus lente. Elle perd systématiquement face aux puissances de  $x$ .



## Formules Clés (Levée d'Indéterminations)

Bataille en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

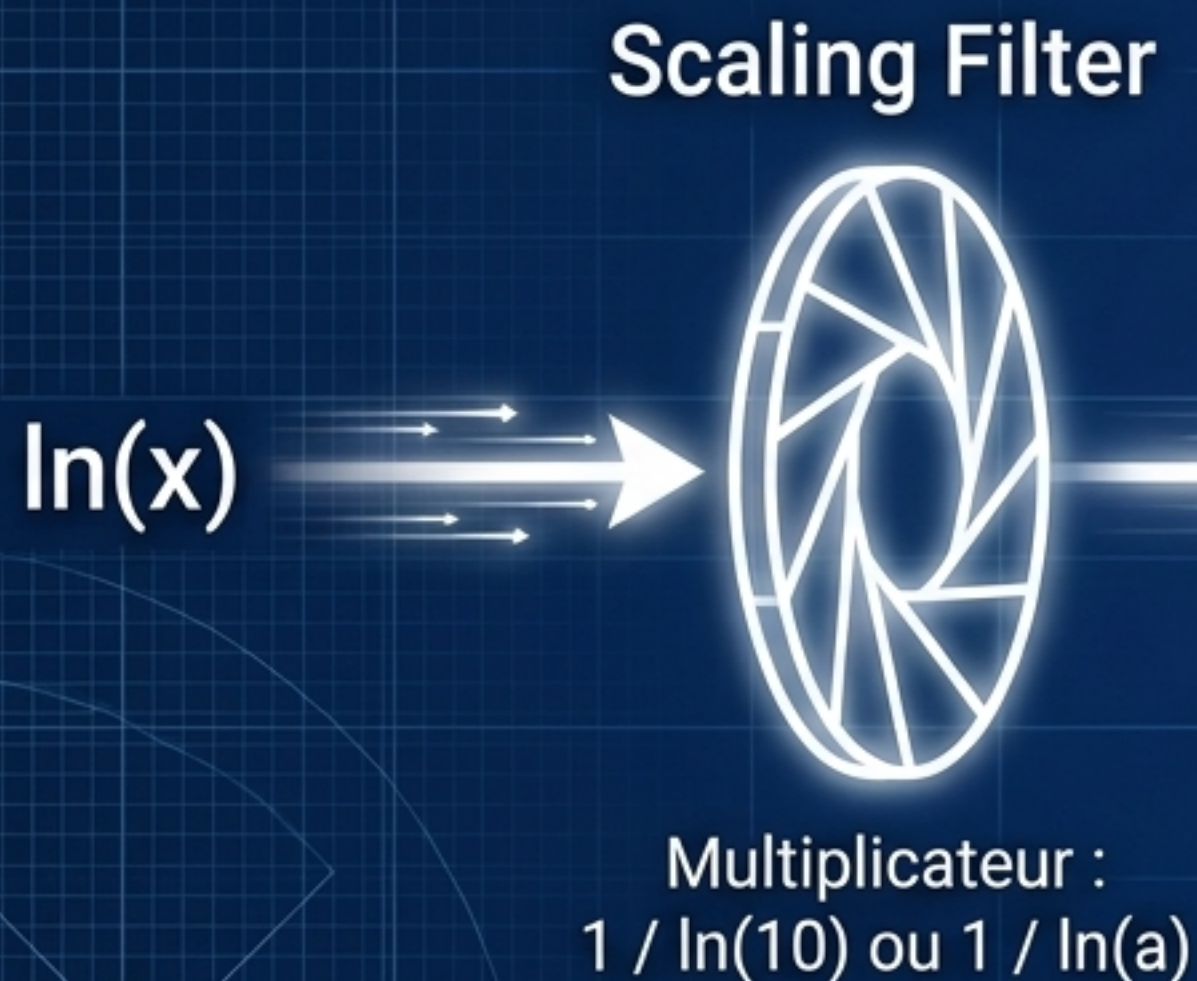
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Bataille en  $0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

# Au-delà de 'e' : Logarithme Décimal et Base 'a'

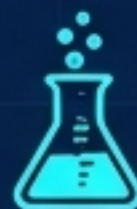


## Le Logarithme Décimal (log)

Définition :  $\log(x) = \ln(x) / \ln(10)$

Propriété Reine :  $\log(10^n) = n$

### Applications Réelles



pH en chimie



Échelle de Richter  
en sismologie



Décibels en  
acoustique

## Exponentielle de Base 'a'

Définition :  $a^x = e^{x \ln a}$  (pour  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ )

Dérivée de base :  $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$

# TD Focus : Stratégie Infaillible pour les Équations

## Étape 1 : L'Ensemble de Validité (Le Filtre)

**Action :** Avant tout calcul, identifier où l'équation existe.

**Règle :** Tout argument à l'intérieur d'un  $\ln(\dots)$  doit être strictement positif ( $> 0$ ).

## Étape 2 : L'Injection (Le Mécanisme)

**Action :** Utiliser l'exponentielle ou les propriétés algébriques pour 'faire sauter' le  $\ln$ .

**Règle :**  $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$  (grâce à la bijectivité).

## Étape 3 : La Vérification (Le Contrôle Qualité)

**Action :** Croiser les solutions mathématiques trouvées avec l'ensemble de validité défini à l'étape 1.

**Règle :** Rejeter toute racine 'fantôme' (hors domaine).

# En Pratique : Résolution des Équations (Ex 2)

## Ex 2.4 - Fusion Algébrique

Équation

$$\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(6)$$

Validité

$$x+3 > 0 \text{ et } x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Calcul

$$\begin{aligned}\ln((x+3)(x-2)) &= \ln(6) \\ x^2 + x - 12 &= 0\end{aligned}$$

Solutions

Racines :  $x = 3$  ou  $x = -4$   
Seul 3 est dans  $]2, +\infty[$ .  $S = \{3\}$

## Ex 2.5 - Changement de Variable

Équation

$$(\ln x)^2 - 5 \ln(x) + 6 = 0$$

Validité

$$x > 0$$

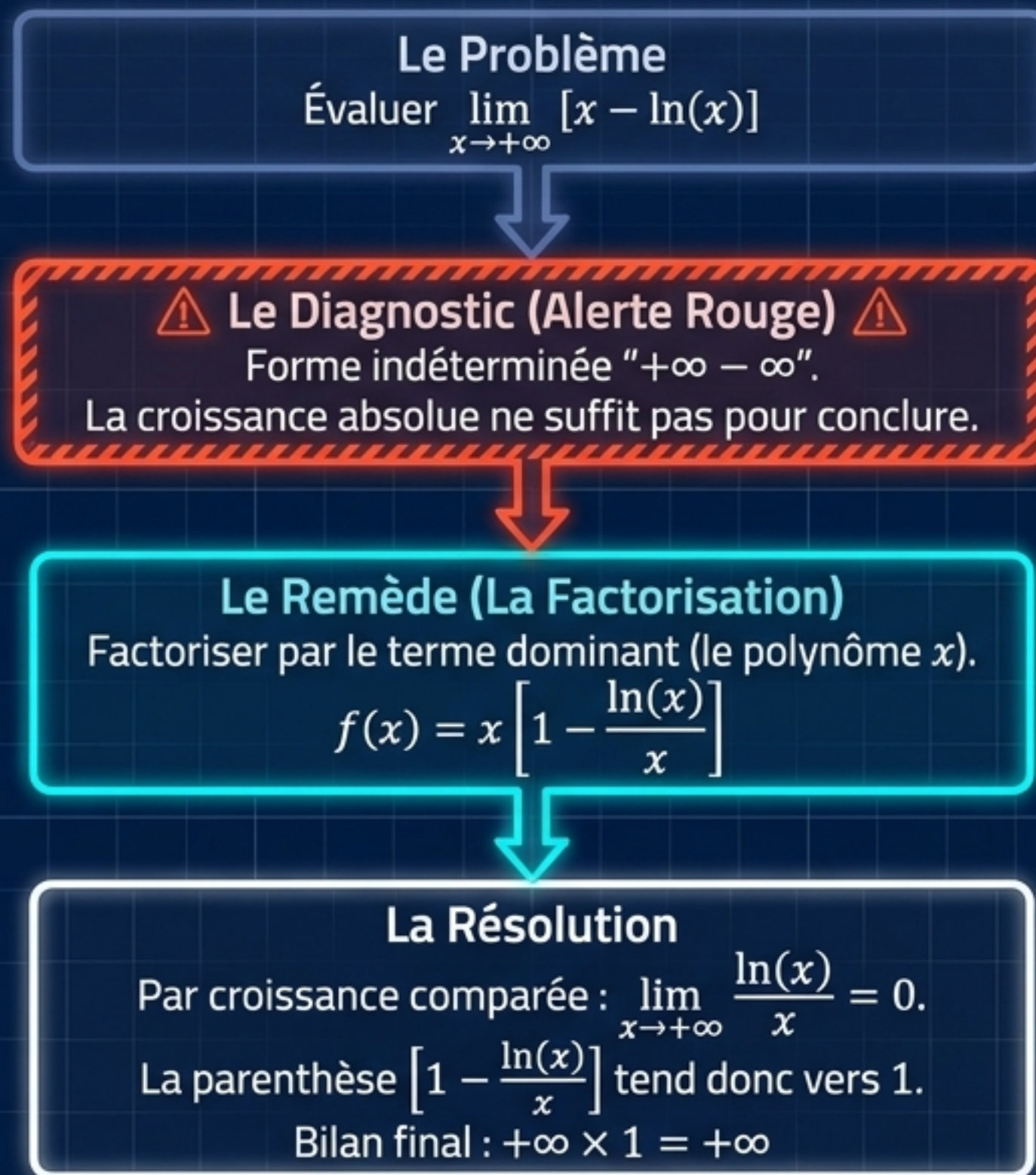
Calcul

On pose  $X = \ln(x)$ .  
L'équation devient  $X^2 - 5X + 6 = 0$ .  
Racines évidentes :  $X = 2$ ,  $X = 3$ .

Solutions

Retour à  $x$  :  
 $\ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2$   
 $\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3$   
 $S = \{e^2, e^3\}$

# TD Focus : Dompter les limites à l'infini (Ex 5a)



# Étude de Fonction Composée (Ex 6)

$$f(x) = \ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \right]$$

## Phase 1 : Le Domaine

Signe de  $\frac{1+x}{1-x} > 0$ .

Le numérateur et le dénominateur imposent le domaine :

$$D = ]-1, 1[$$

## Phase 2 : La Dérivée (Mécanique In $u$ )

$$u(x) = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow u'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{(1-x)}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

## Phase 3 : La Conclusion (Variations)

- Sur  $] -1, 1[$ , le produit  $(1-x)(1+x)$  est strictement positif.
- Donc  $f'(x) > 0$ .
- La fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle.



# L'astuce du Taux d'Accroissement (Ex 4)

## L'Énigme

Prouver que  
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
  
(Forme indéterminée "0/0")



## Le Décodage

Posons  $u(x) = \ln(1+x)$ .  
L'expression se réécrit :  
$$\frac{u(x) - u(0)}{x - 0}$$
  
(puisque  $u(0) = \ln(1) = 0$ )

## La Révélation

Cette limite est, par définition stricte, le nombre dérivé en zéro :  $u'(0)$ .

Calculons :  $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ .

Évaluation :  $u'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ . Le mystère est résolu !

# Matrice de Synthèse : Les Deux Faces de la Pièce

| Dimensions            | Exponentielle ( $e^x$ )        | Logarithme Népérien ( $\ln x$ )    |
|-----------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| Domaine de définition | $\mathbb{R}$                   | $\mathbb{R}_+^*$                   |
| Ensemble Image        | $\mathbb{R}_+^*$               | $\mathbb{R}$                       |
| Dérivée               | $f'(x) = e^x$                  | $f'(x) = 1/x$                      |
| Limites aux bornes    | 0 (en $-\infty$ ) et $+\infty$ | $-\infty$ (en $0^+$ ) et $+\infty$ |
| Propriété Reine       | $e^{a+b} = e^a \times e^b$     | $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$        |
| Tangente d'ancrage    | $y = x + 1$ (en 0)             | $y = x - 1$ (en 1)                 |

Key Insight : Les deux courbes sont parfaitement symétriques par rapport à la première bissectrice  $y=x$ .

# Prêts pour l'Examen : Les 3 Réflexes Vitaux



## Le Réflexe Validité

Ne commencez jamais à résoudre une équation logarithmique sans avoir préalablement cherché son domaine de définition ( $u(x) > 0$ ). C'est le piège numéro un.



## Le Réflexe Factorisation

Face à une forme indéterminée contenant un  $\ln$  à l'infini, la solution est presque toujours de factoriser par le terme dominant ( $x$  ou  $x^n$ ) pour invoquer la croissance comparée.



## La Boîte à Outils

Avant de vous lancer dans des dérivées titanesques, utilisez les propriétés algébriques ( $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ ) pour simplifier l'expression. "Abaisser le niveau de l'opération" vous sauvera du temps et des erreurs.