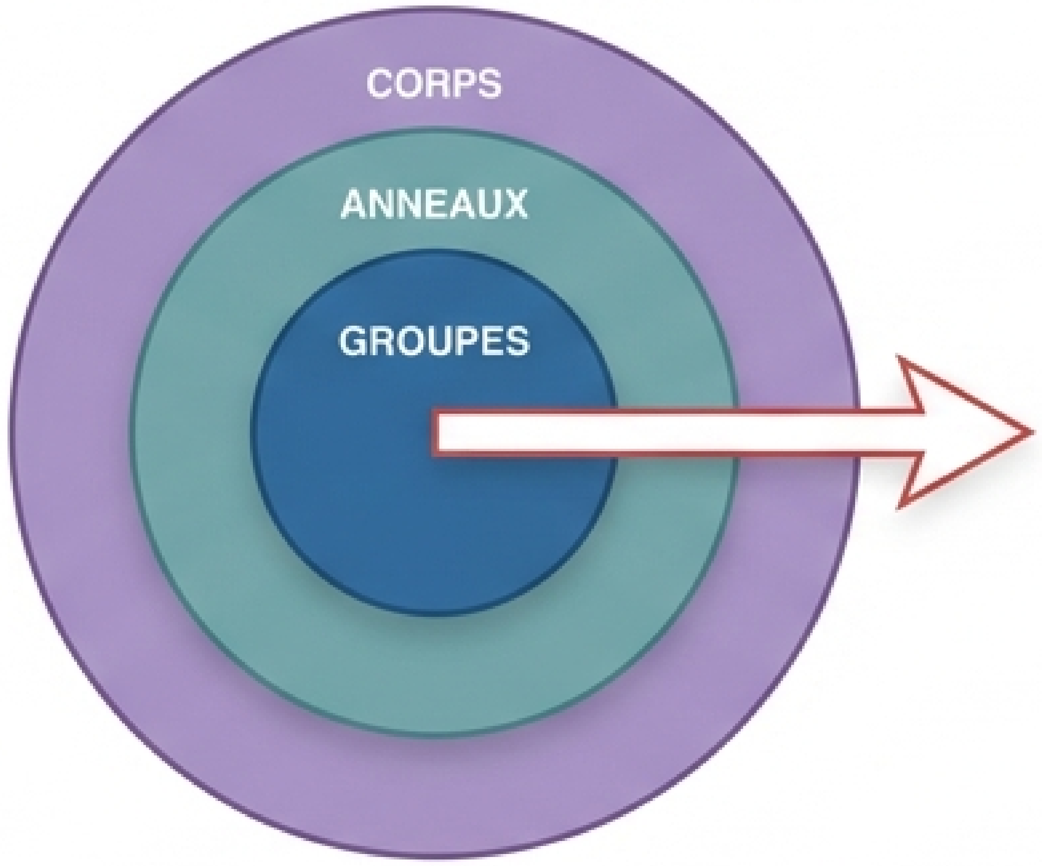


Chapitre 5 : Structures Algébriques

De la Loi de Composition aux Espaces Vectoriels

---

1. **Lois de composition**
   - Internes et Externes
2. **Structures Fondamentales**
   - Groupes, Anneaux et Corps
3. **La Synthèse**
   - Espaces Vectoriels et Applications Linéaires

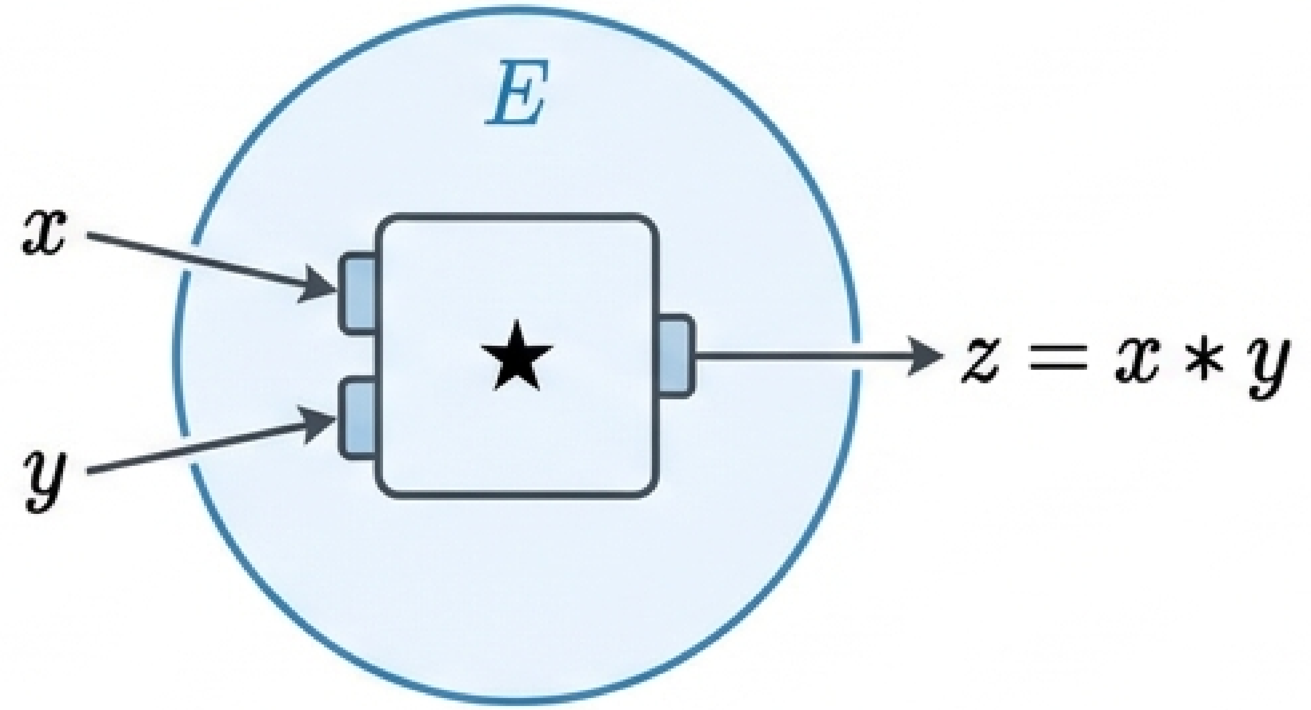
5.1 Lois de Composition Internes

Définition

Soit E un ensemble non vide. Une **loi de composition interne** est une application :

$$\star : E \times E \to E$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

L'élément $x * y$ est appelé le **« composé »** de x et y.



Exemples Fondamentaux

- L'addition dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto x + y$
- L'addition dans $\mathbb{R}^n$: $(x_1, ..., x_n) + (y_1, .., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
- Composition des translations dans $\mathcal{T}$: $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

Propriétés d'une Loi $(E, \star)$

(A) Associativité

Le parenthésage n'influe pas sur le résultat.

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (y * z)$$

(C) Commutativité

L'ordre des éléments n'importe pas.

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = y * x$$

(N) Élément Neutre

Il existe un élément e qui ne modifie pas les autres.

$$\exists e \in E, \forall x \in E, x * e = e * x = x$$

(S) Symétrisabilité

Tout élément a un inverse.

$$\forall x \in E, \exists x' \in E, x * x' = x' * x = e$$

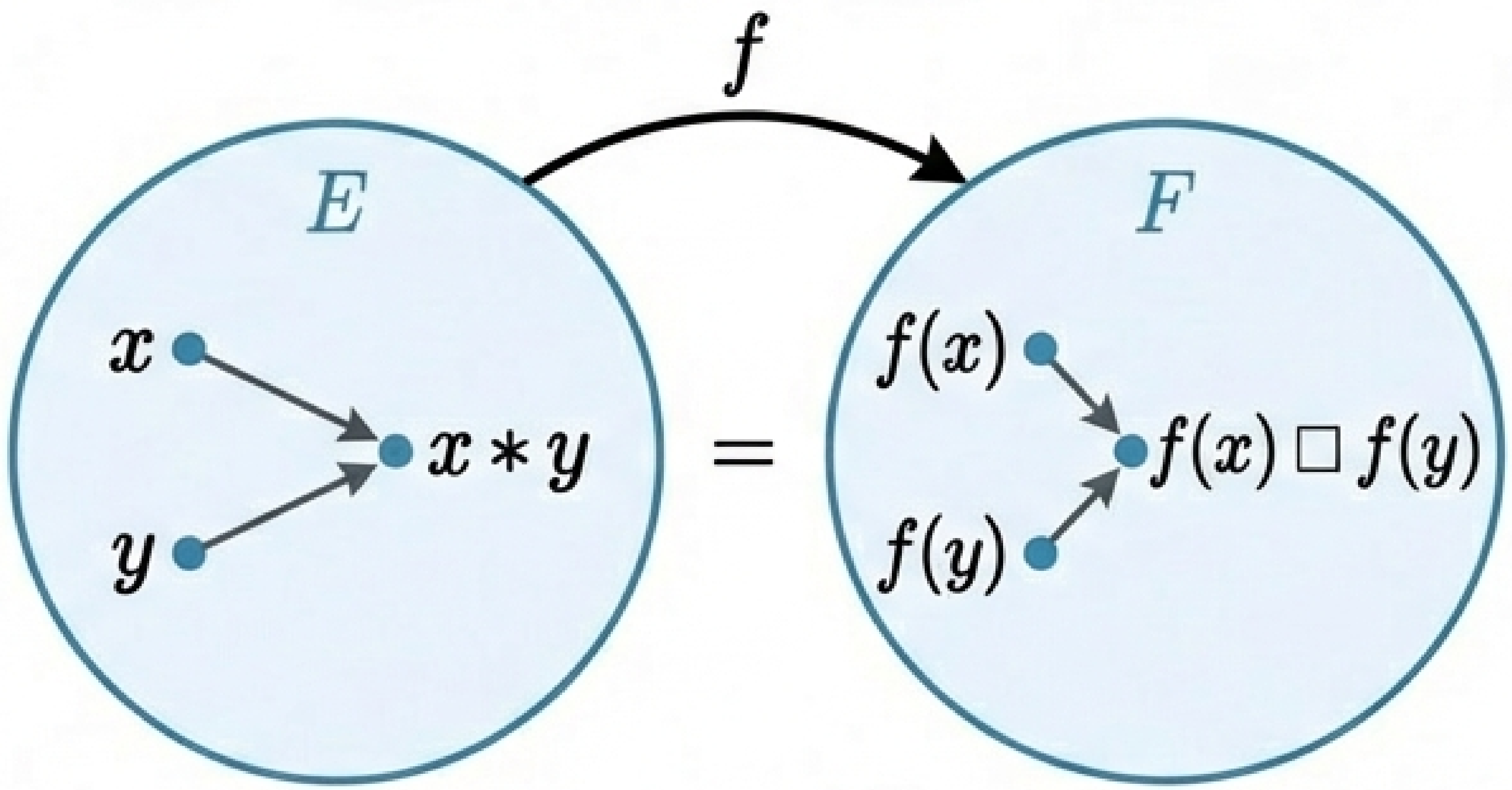
(Ex : dans $\mathbb{R}$, le symétrique est l'opposé $-x$)

Morphismes de Structures

Définition

Soient $(E,\star)$ et $(F,\square)$ deux ensembles structurés. Une application $f : E \to F$ est un **morphisme** si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x * y) = f(x) \,\square\, f(y)$$



Endomorphisme

Morphisme de $(E,\star)$ dans lui-même.

Isomorphisme

Morphisme bijectif (f^{-1} est aussi un morphisme).

Automorphisme

Endomorphisme bijectif.

Exemple : La fonction exponentielle est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

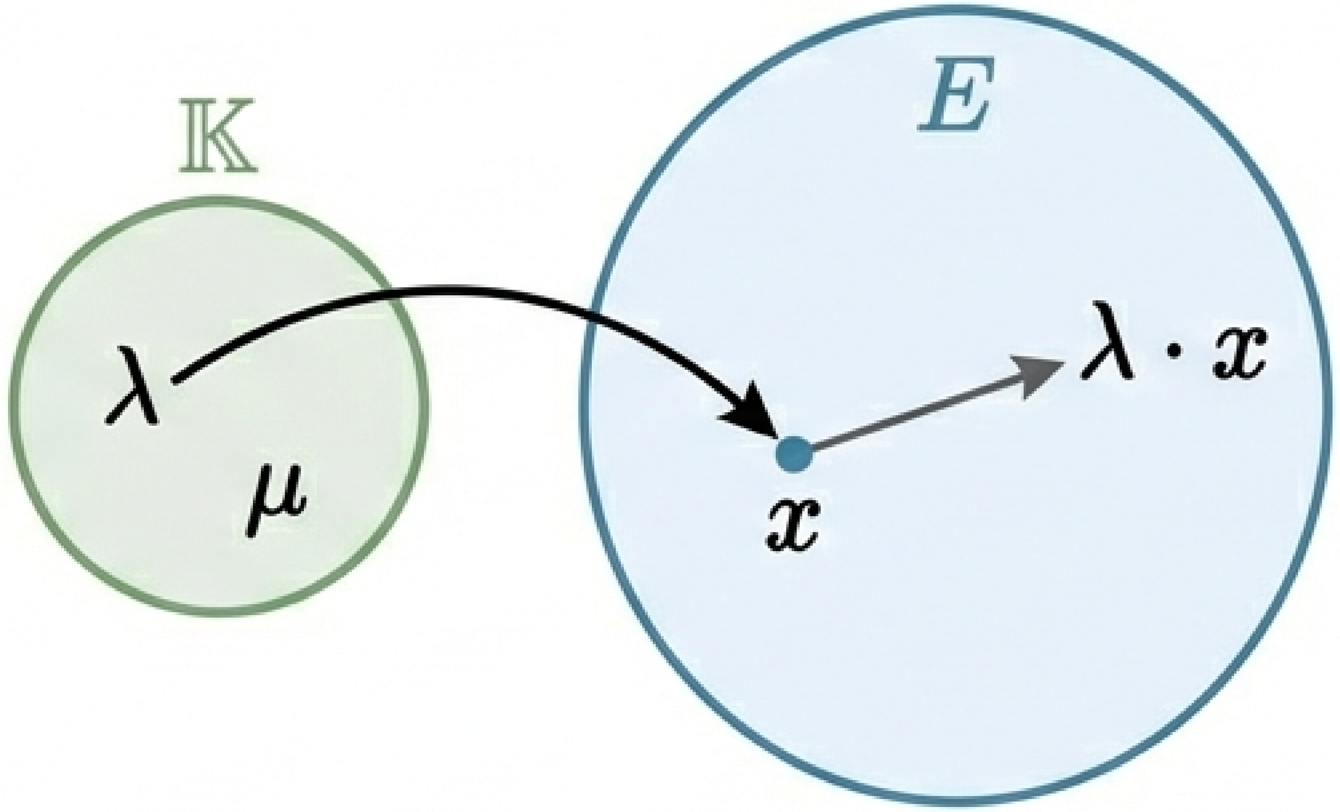
5.1.2 Lois de Composition Externes

Contexte : $\mathbb{K}$ est un corps (ex: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition

Une **loi externe** sur E à opérateurs dans $\mathbb{K}$ est une application :

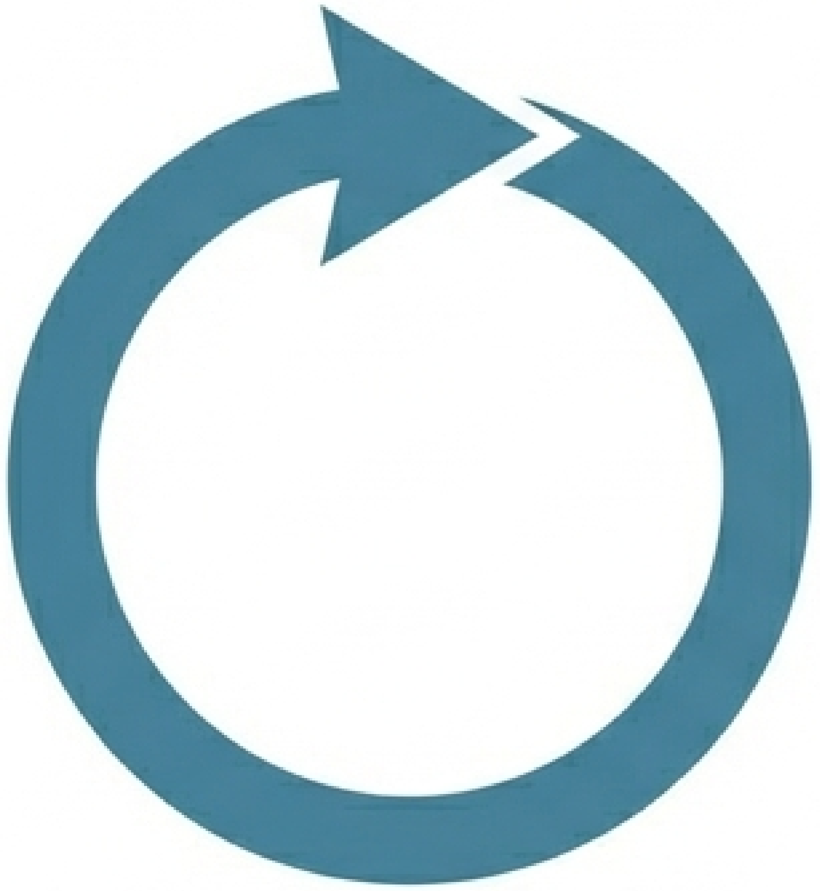
$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$



Examples

1. **Multiplication** dans $\mathbb{R}^n$: $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$
2. **Géométrie** : Multiplication d'un vecteur géométrique $\vec{u}$ par un réel λ.

5.2 Structure de Groupe



Le Groupe $(G, \star)$

Définition

Un couple $(G, \star)$ est un **groupe** si la loi $\star$ vérifie 3 axiomes :

1. **(A)** Associativité : $\forall (x, y, z) \in G^3, (x * y) * z = x * (y * z)$
2. **(N)** Existence d'un élément neutre e : $\forall x \in G, x * e = e * x = x$
3. **(S)** Tout élément admet un symétrique (inverse/opposé) :
$$\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = y * x = e$$

Groupe Abélien

Si la loi est en plus **Commutative** ($x * y = y * x$), le groupe est dit *abélien*.

Notation	Loi	Neutre	Symétrique
Additive	$+$	0	$-x$ (opposé)
Multiplicative	$\times$	1	x^{-1} (inverse)

Exemples et Contre-exemples de Groupes

Ensembles Numériques

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

$(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe abélien.

Attention : $(\mathbb{N}, +)$ n'est PAS un groupe (pas d'opposé).

Complexes Unimodulaires

$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un groupe pour la multiplication.

U_n (Racines n-ièmes) est un sous-groupe fini.

Permutations socistations

Ensemble est **groupe** dit un définition sur a :

$$(\mathbb{Z}, +) = (\mathbb{M}, \lambda)$$

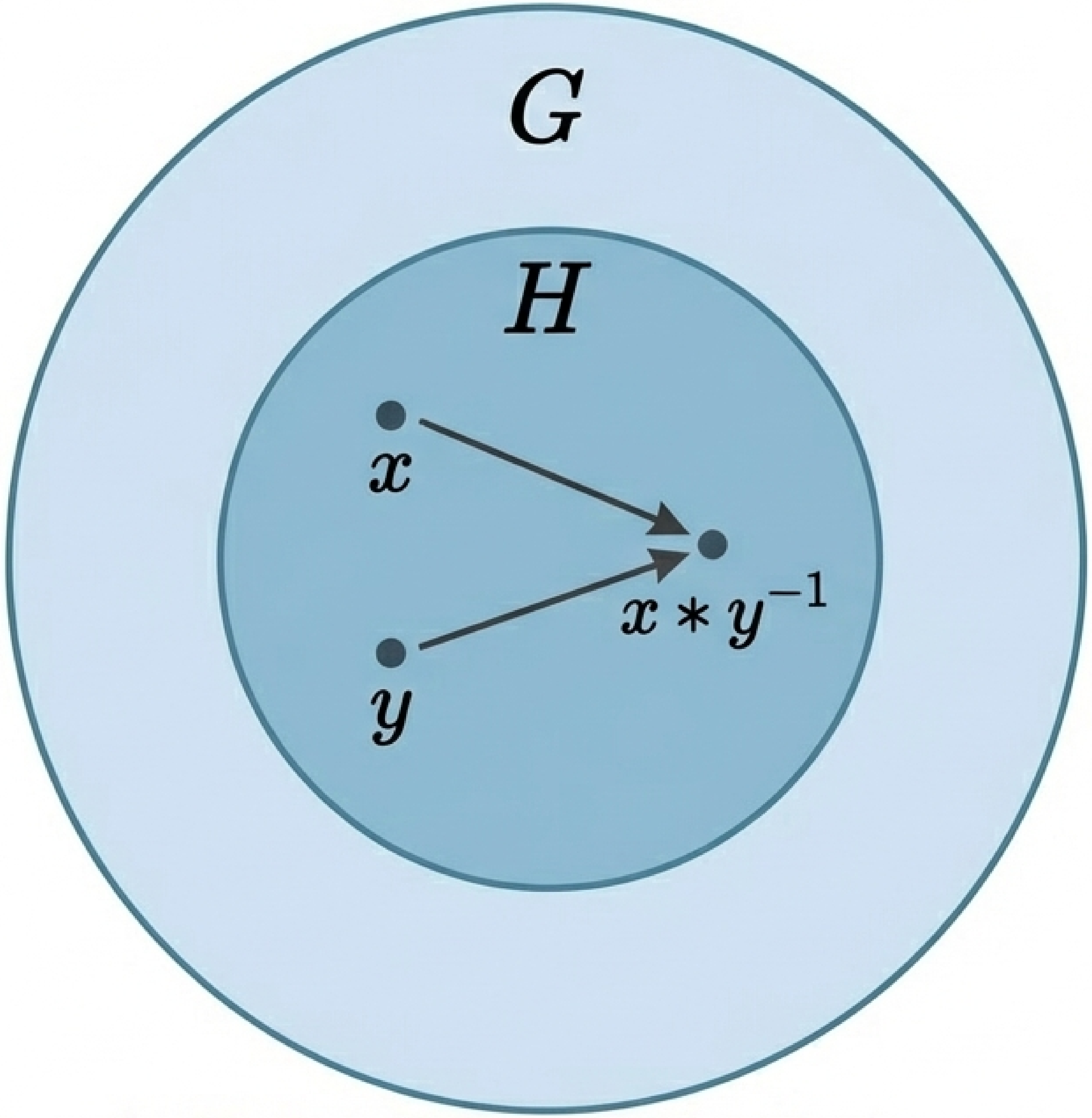
Permutations $S(E)$

Ensemble des bijections de E sur E.

Loi : Composition $\circ$.

Non abélien si $|E| \geq 3$.

Sous-Groupes : Caractérisation



Définition

Une partie $H \subset G$ est un **sous-groupe** si c'est un groupe pour la loi induite.

Théorème de Caractérisation

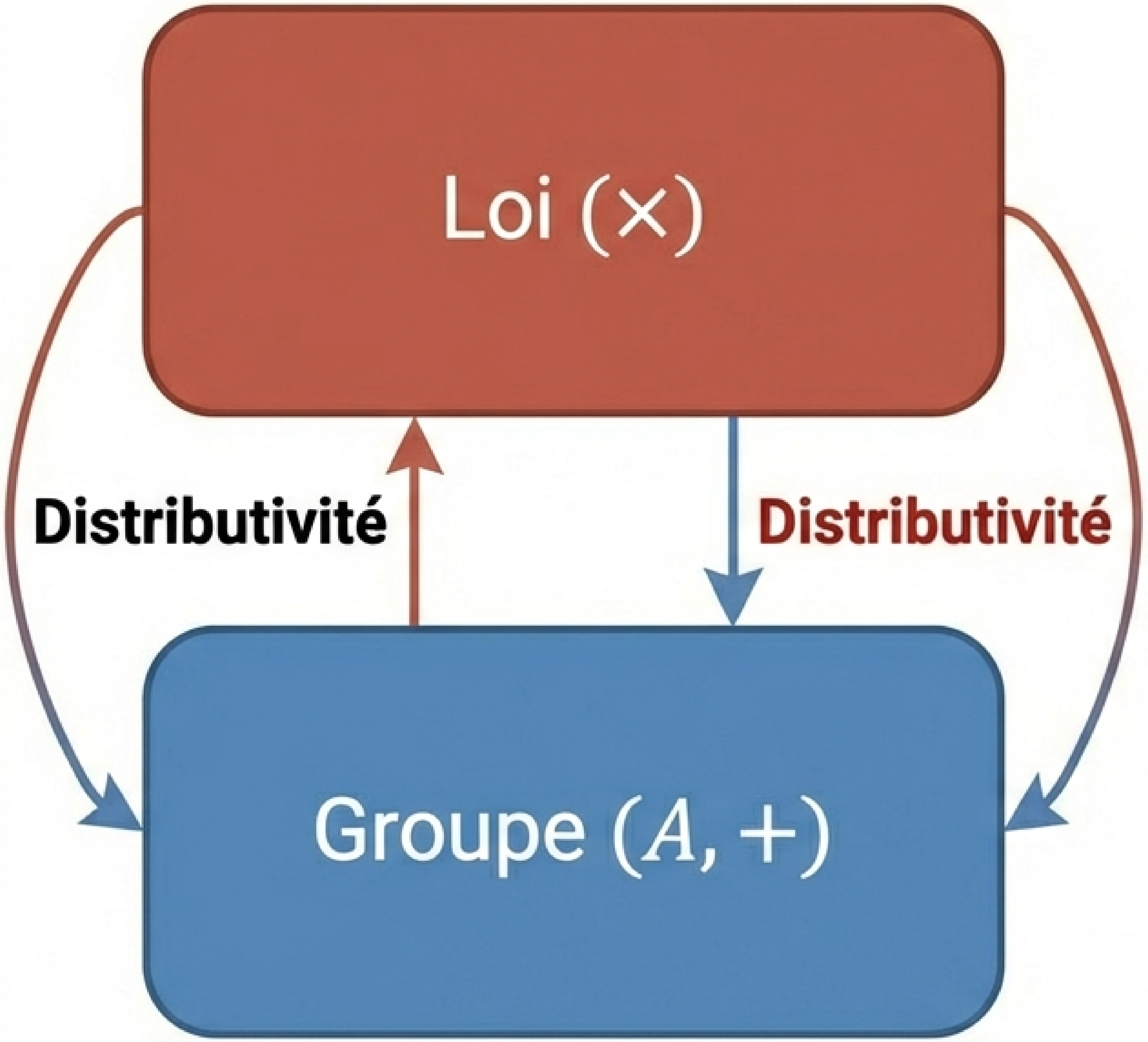
H est un sous-groupe de $(G, \star)$ si et seulement si :

1. $e \in H$ (H est non vide)
2. **Stabilité** : $\forall (x, y) \in H^2,\ x * y^{-1} \in H$

Exemples

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ (pour l'addition)
$U_n \subset U$ (Cercle unité)

5.3 Anneaux (Structures à Deux Lois)



Définition

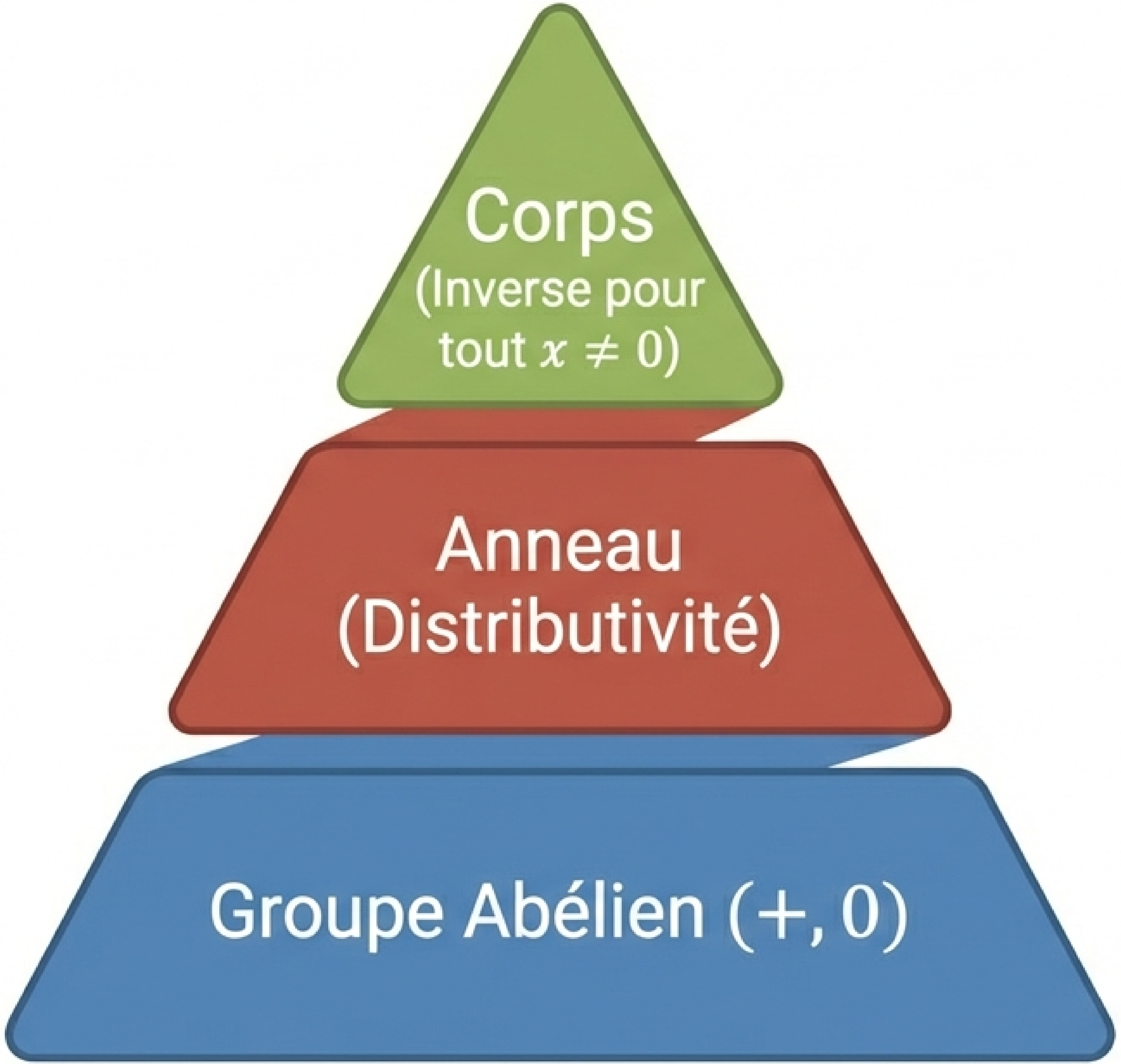
Un triplet $(A, +, \times)$ est un **anneau** si :

1. $(A, +)$ est un **groupe abélien** (neutre 0).
2. $\times$ est **associative** et possède un **élément neutre** (1).
3. $\times$ est **distributive** par rapport à $+$.

Exemples

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$: Anneau commutatif.
- $M_n(\mathbb{R})$: Anneau des matrices (Non commutatif).
- $2\mathbb{Z}$: Sous-anneau (sans élément neutre multiplicatif).

5.4 Corps (The Fields)



Définition

Un ensemble $\mathbb{K}$ est un **Corps** si :

1. $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau non nul.
2. Tout élément **non nul** admet un inverse pour $\times$.

Conséquence : On peut additionner, soustraire, multiplier et **diviser**.

Exemples

- Corps Classiques : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- Corps Finis : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier).

5.5 Espaces Vectoriels : Structure Complète

Définition : Un triplet $(E, +, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$

Structure Interne $(E, +)$

$(E, +)$ est un **groupe abélien**.

- EV1. Associativité
- EV2. Neutre (0_E)
- EV3. Opposé $(-x)$
- EV4. Commutativité

Action Externe $(\cdot)$

Action de $\mathbb{K}$ sur E.

- EV5. Distributivité scalaires : $\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$
- EV6. Distributivité vectorielle : $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$
- EV7. Associativité mixte : $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
- EV8. Unité : $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

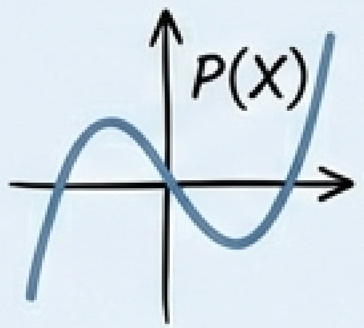
Exemples d'Espaces Vectoriels

Exemples d'Espaces Vectoriels

$$((x, y, z))$$

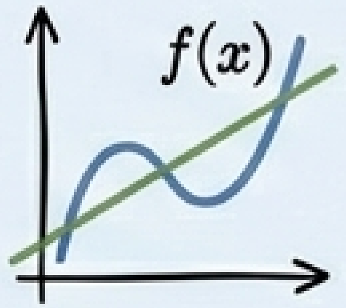
$\mathbb{R}^n$ (Les n-uplets)

Addition et multiplication terme à terme.



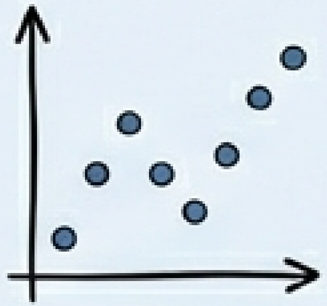
$\mathbb{K}[X]$ (Les Polynômes)

Suites de coefficients presque tous nuls. nuls. Dimension infinie.



$C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Fonctions)

Espace des fonctions continues. Inclut les fonctions affines $x \mapsto ax + b$.



$S_{a,b}$ (Suites Récurrentes)

Suites vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Propriétés et Règles de Calcul

Propriété du vecteur nul

$$\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$$

*Preuve : Si $\lambda \neq 0$, on multiplie par λ^{-1} pour isoler x.

Gestion des signes

$$(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$$

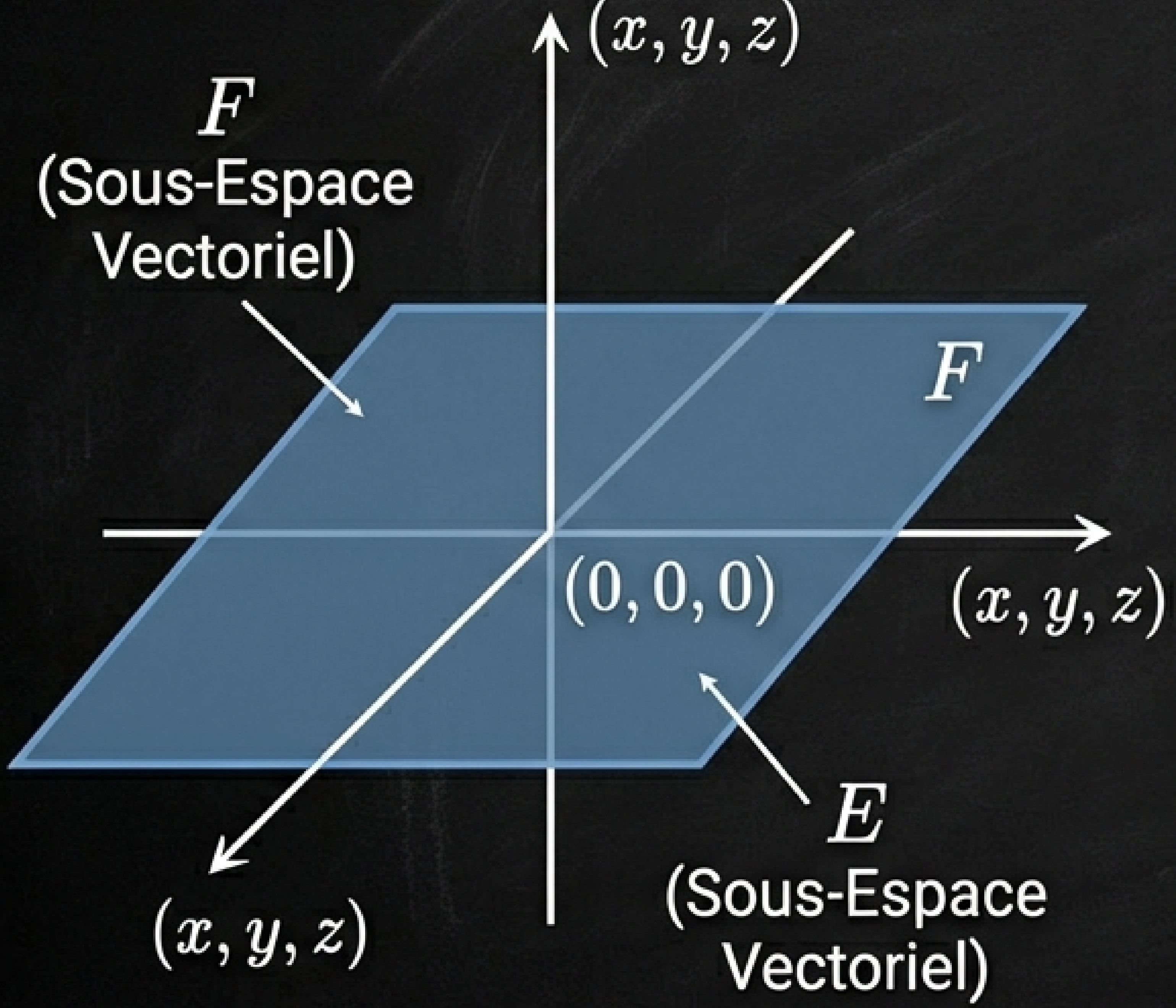
L'opposé du scalaire peut se déplacer ou sortir du produit.

Notation Somme

Pour une famille finie (x_k) :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

5.5.3 Sous-Espaces Vectoriels (S.E.V.)



Définition :

Une partie $F \subset E$ est un S.E.V. si elle est stable par combinaisons linéaires.

Caractérisation Pratique

Théorème Box (The Test) : F est un S.E.V. de E si et seulement si :

1. $F \neq \emptyset$ (En pratique : vérifier $0_E \in F$)
2. **Stabilité** :
   $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \ \ \lambda x + \mu y \in F$

Note: Un S.E.V. est lui-même un Espace Vectoriel.

Bases et Applications Linéaires

Bases & Dimension

Famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base** si tout vecteur a une décomposition **unique**.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Dimension $n = \dim(E)$.

Applications Linéaires $f : E \to F$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Noyau (*Ker f*)

$$\{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$$

Sous-espace de E.

Image (*Im f*)

$$\{y \in F \mid \exists x, y = f(x)\}$$

Sous-espace de F.