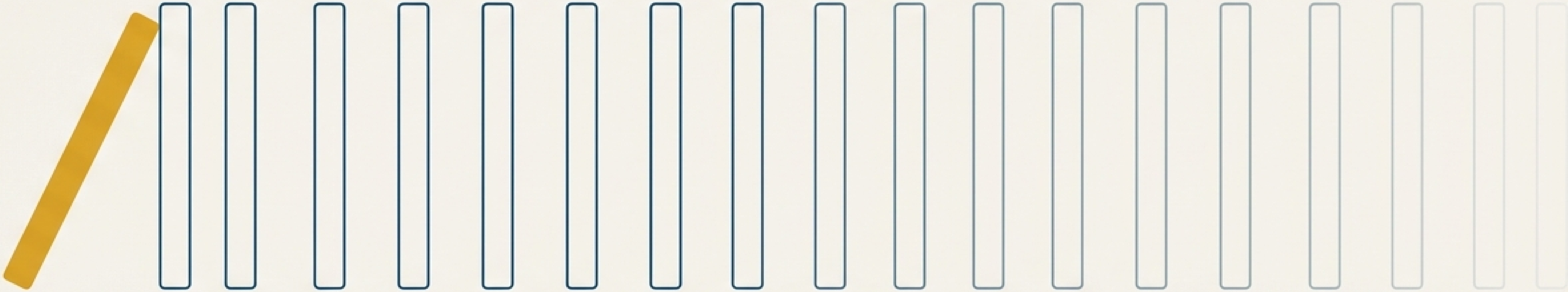
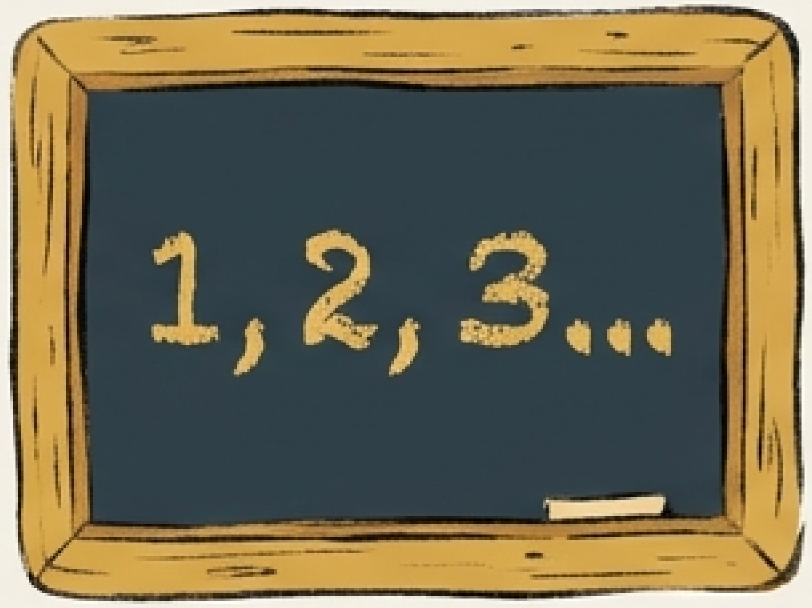
Raisonnement par Récurrence : De l'Axiome à la Méthode



Construire l'échelle de l'infini dans $\mathbb{N}$

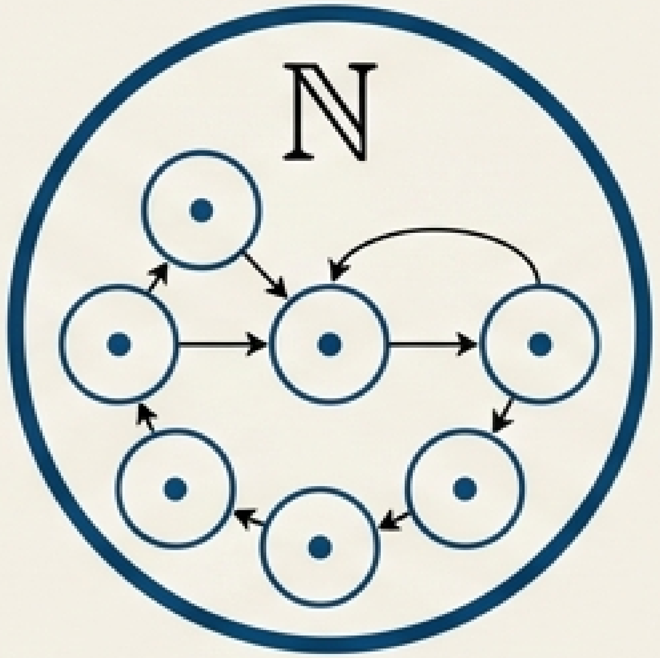
CHAPITRE 6 – MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

De l'Intuition à la Rigueur Axiomatique



The Intuition

La perception familière des nombres suffit pour l'apprentissage numérique élémentaire. C'est l'approche intuitive.



The Rigor

Cependant, la rigueur mathématique exige une construction formelle. Au XIXe siècle, Richard Dedekind et Giuseppe Peano ont établi les fondations axiomatiques de l'ensemble $\mathbb{N}$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ ne se contente pas d'exister ; il est construit par des règles strictes.

Les Axiomes de Peano (Proposition 6.1)

N1 : Tout entier n admet un successeur $n+1$.

N2 : 0 est un entier naturel.

N3 : 0 n'est le successeur d'aucun entier.

N4 : Deux entiers ayant le même successeur sont égaux.

N5 : $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

N6 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

La clé de voûte du principe de récurrence.

Le Principe de Récurrence (Théorème 6.3)

The Theorem

Si A est une partie de $\mathbb{N}$ satisfaisant deux conditions :

- Initialisation : $0 \in A$
- Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \Rightarrow n + 1 \in A)$

Alors $A = \mathbb{N}$.

The Foundation

Proposition 6.2

Ce principe repose sur l'Axiome du plus petit élément :
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément p.

Démonstration par l'Absurde

Supposons $A \neq \mathbb{N}$. On définit l'ensemble des "ratés" : $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$.

$\downarrow$

B est non vide. D'après l'axiome du plus petit élément (N6), il existe un plus petit élément $p \in B$.

$\downarrow$

Comme $0 \in A$, alors $p \neq 0$. Donc $p \geq 1$ et $p - 1 \in \mathbb{N}$.

$\downarrow$

Puisque p est le plus petit élément de B, alors $p - 1 \notin B$, donc $p - 1 \in A$.

$\downarrow$

Par l'hérédité de A : si $p - 1 \in A \Rightarrow (p - 1) + 1 \in A \Rightarrow p \in A$.

$\downarrow$

Contradiction ! p ne peut pas être à la fois dans A et dans B. L'hypothèse est fausse, donc $A = \mathbb{N}$.

Méthode 6.1 : Rédiger un Raisonnement

1. Explicitation

Définir clairement la propriété $P(n)$ dépendant de l'entier n.

2. Initialisation

Montrer que $P(0)$ est vraie. C'est le point de départ.

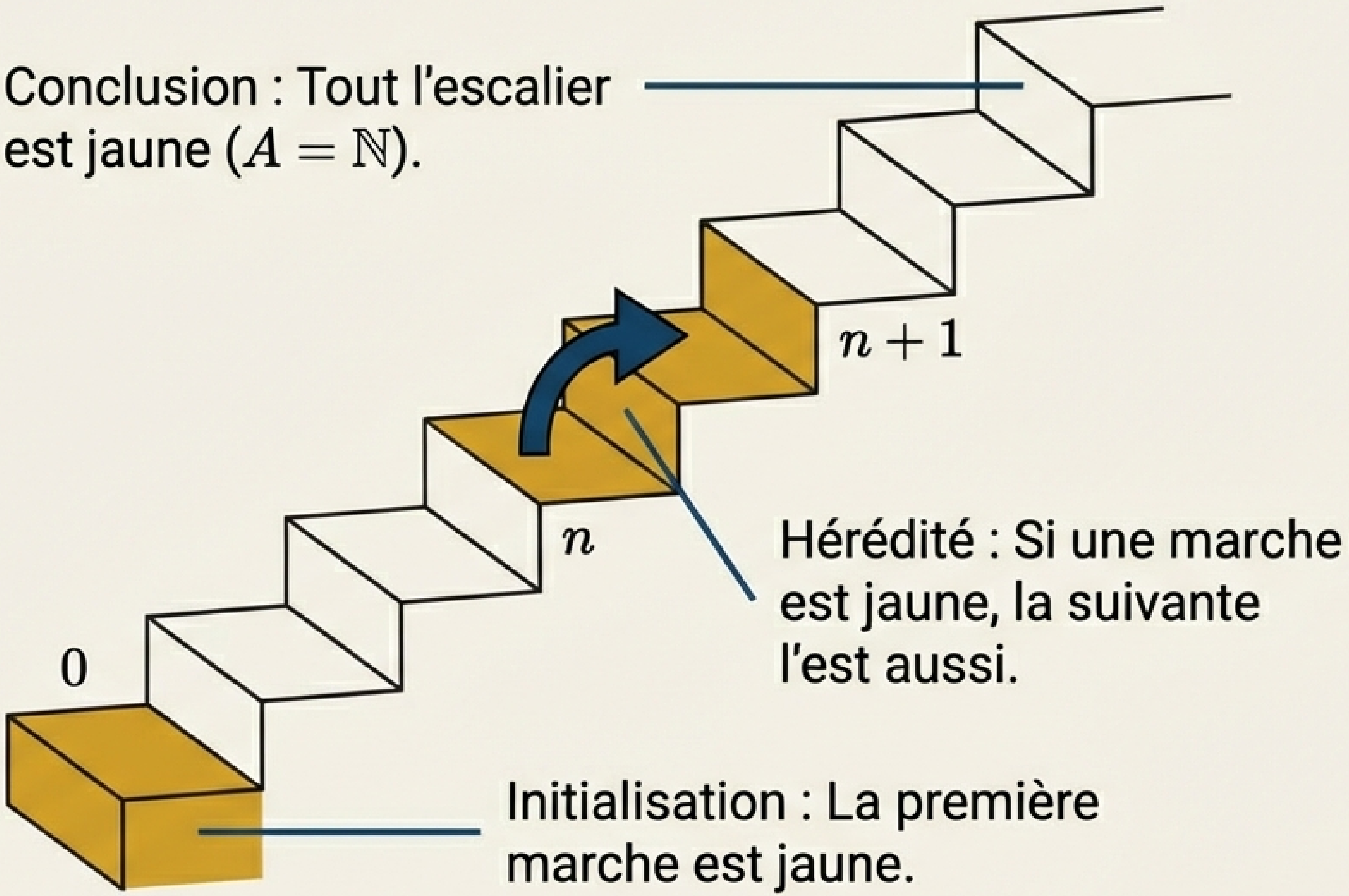
3. Hérédité

Montrer que si $P(n)$ est vraie pour un rang n fixé (Hypothèse H_n), alors $P(n+1)$ est vraie.

Objectif : Prouver $H_n \Longrightarrow H_{n+1}$.

Conclusion : Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

L’Analogie de l’Escalier



Analogie du Lycée Saint Augustin :

Être en bas + connaître la règle de transmission = Atteindre le sommet.

Exemple 6.1 : Puissances et Valeurs Absolues

Objectif : Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n$.

Pour $n = 0$:

$|x^0| = |1| = 1$

$|x|^0 = 1$

L'égalité est vérifiée.

Supposons $|x^n| = |x|^n$ (Hypothèse HR).

Calculons au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} |x^{n+1}| &= |x^n \times x| \\ &= |x^n| \times |x| \text{ (Propriété de la valeur absolue)} \\ &= |x|^n \times |x| \text{ (Utilisation de HR)} \\ &= |x|^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et initialisée, donc vraie pour tout n.

Exemple 6.2 : Somme des Carrés

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hérédité : Montrons que $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{(d'après HR)} \\
&= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)}{6}\right] && \text{(Factorisation)} \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + n + 6n + 6) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6)
\end{aligned}$$

Or, $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. L'égalité est prouvée.

Le Piège de l'Hérédité Sans Initialisation

Proposition Fausse : $\forall n \in \mathbb{N}, 9 \mid (10^n + 1)$

L'Illusion (L'Hérédité fonctionne)

Si $10^n + 1 = 9k$, alors :

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10(10^n) + 1 \\ &= 10(9k - 1) + 1 = 90k - 10 + 1 \\ &= 90k - 9 = 9(10k - 1) \end{aligned}$$

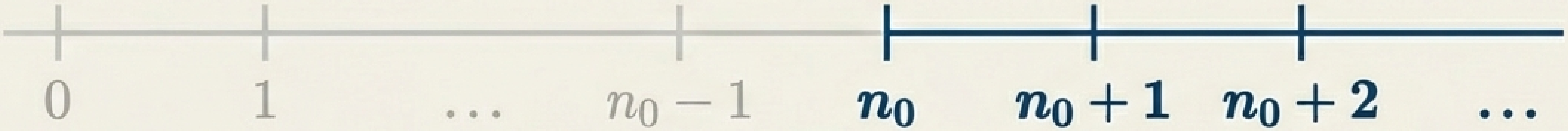
C'est un multiple de 9.
La mécanique fonctionne.

La Réalité (L'Initialisation échoue)

Pour $n = 0$:
$10^0 + 1 = 1 + 1 = 2.$

9 ne divise pas 2.
L'échelle ne touche pas le sol.

Récurrence à partir d'un rang n_0 (Proposition 6.5)



Si la propriété est vraie à n_0 et héréditaire pour tout $n \geq n_0$, alors elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.

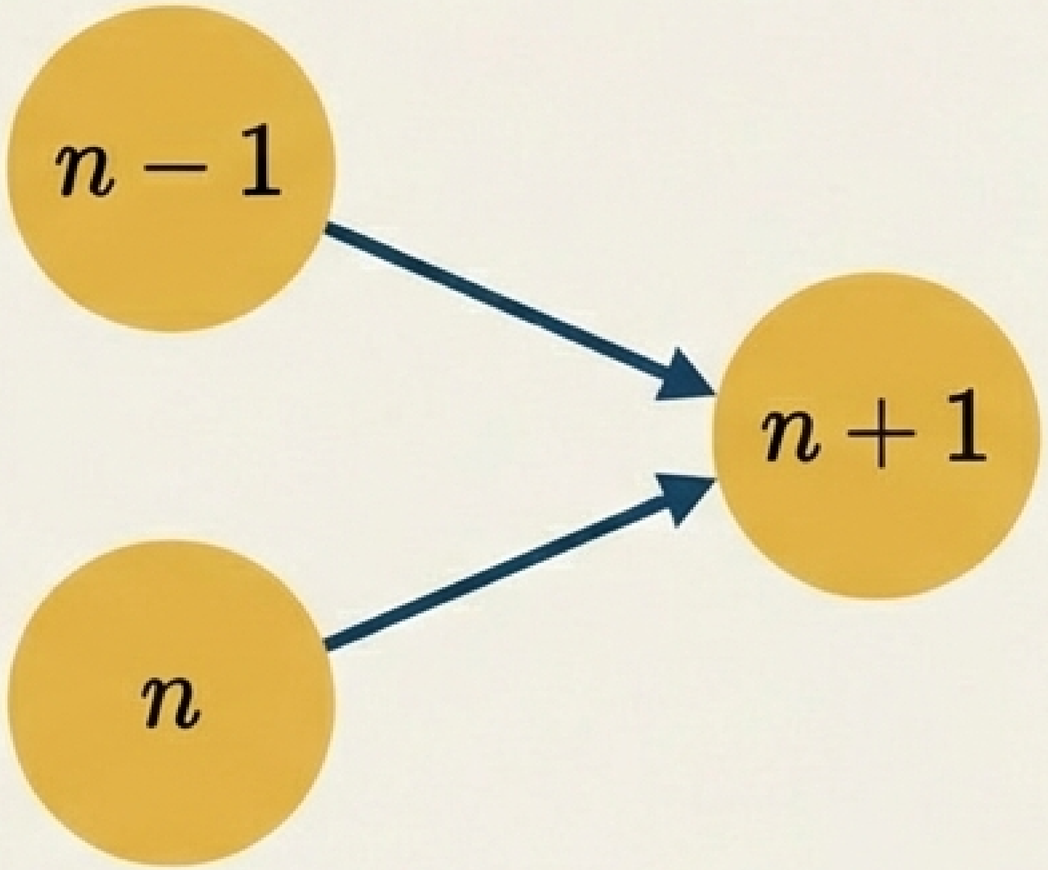
Mécanisme de preuve :

- On pose un changement de variable $k = n - n_0$.
- On ramène le problème à une récurrence standard sur k commençant à 0.
- $Q(k) \Leftrightarrow P(n_0 + k)$.

Note : L'échelle peut être posée n'importe où, tant qu'on peut monter la première marche.

Récurrence d'Ordre 2 (Corollaire 6.6)

Nécessaire quand $P(n+1)$ dépend de $P(n)$ ET $P(n-1)$.



Conditions :

1. **Double Initialisation** : $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
2. **Hérédité** : $(P(n-1)$ et $P(n)) \Rightarrow P(n+1)$.

Note : On prouve que la paire $(P(n-1), P(n))$ est vraie pour tout n.

Exemple 6.4 : Conjecture et Preuve

```
u = 2*b - a
# Result for n=20: [5, 7, …, 41]
```

Conjecture : $u_n = 2n + 1$

Preuve (Ordre 2) pour $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$

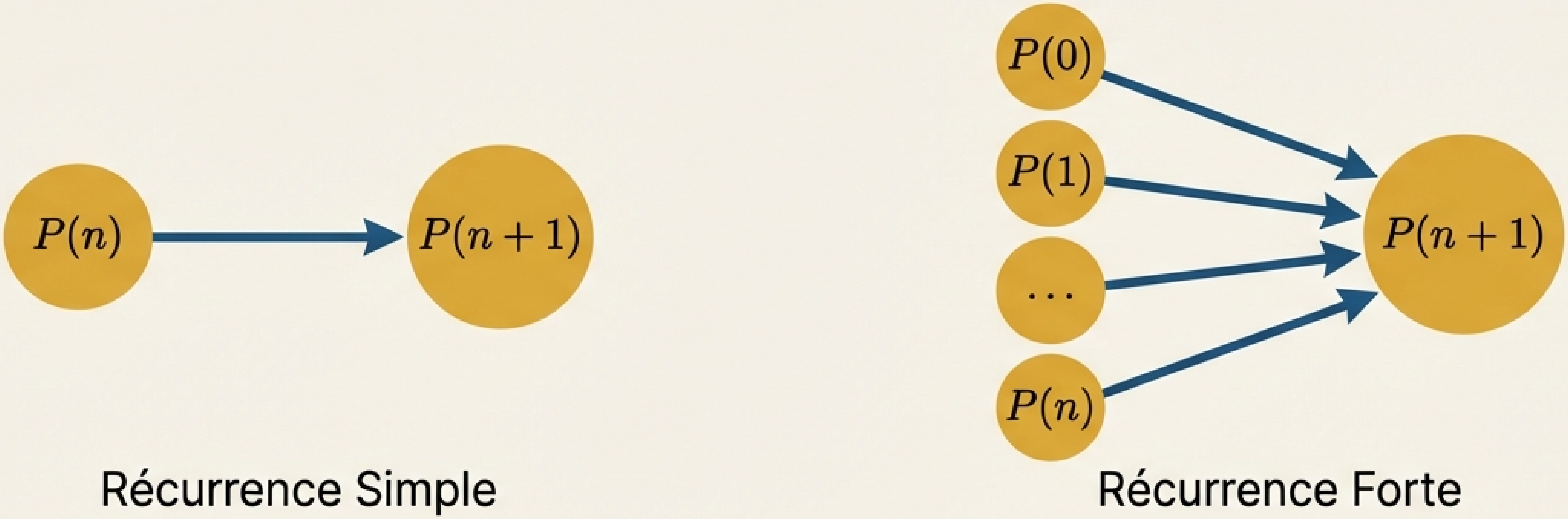
Init : $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$. La formule $2n + 1$ marche.

Hérédité : Supposons $u_{n-1} = 2(n-1) + 1$ et $u_n = 2n + 1$.

$$u_{n+1} = 2(2n+1) - (2(n-1)+1)$$
$$u_{n+1} = 4n + 2 - (2n - 2 + 1)$$
$$u_{n+1} = 4n + 2 - 2n + 1 = 2n + 3$$

Or $2(n+1) + 1 = 2n + 3$. C.Q.F.D.

Récurrence Forte (Théorème 6.7)



L'hypothèse de récurrence est beaucoup plus riche. On suppose que la propriété est vraie pour **tous** les entiers $k \leq n$.

Notation : On considère la propriété cumulée $Q(n)$: '$P(0), \dots, P(n)$ sont vraies}'.

Application : Décomposition en Facteurs Premiers

Théorème : Tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers.

Initialisation : $n = 2$ est premier. Vrai.

Hérédité Forte : Supposons la propriété vraie pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$. Considérons $n + 1$.

$n + 1$ est premier.

Terminé.

$n + 1$ n'est pas premier.

Alors $n + 1 = a \times b$ avec $2 \leq a, b \leq n$.
Par hypothèse forte, a et b sont déjà des produits de premiers. Donc leur produit ab (soit $n + 1$) l'est aussi.

La **récurrence forte** permet de "capturer" n'importe quel prédécesseur nécessaire à la preuve.